

**TRANSPORTERSCHEINUNGEN UND RANDBEDINGUNGEN
IN VERDÜNNTEN MEHRATOMIGEN GASEN
IM MAGNETFELD**

von
Herbert Vestner
aus
Lauf



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548410_0010

TRANSPORTERSCHINUNGEN UND RANDBEDINGUNGEN IN VERDÜNNTEN MEHRATOMIGEN GASEN IM MAGNETFELD

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Herbert Vestner

aus

Lauf

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung:	7. Februar 1973
Dekan:	Prof.Dr. W.Heumann
Erstberichterstatter:	Prof.Dr. L.Waldmann
Zweitberichterstatter:	Univ.Doiz.Dr. S.Hess

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

ZUSAMMENFASSUNG	1
EINLEITUNG	2
TEIL A: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RANDBEDINGUNGEN FÜR MEHRATOMIGE GASE IM MAGNETFELD	6
I. <u>Differentialgleichungen</u>	7
§1. Das spezielle System der Transport-Relaxations- Gleichungen	7
§2. Lokale Erhaltungssätze und Temperaturrelaxation	14
§3. Der quasistationäre Fall: Ansätze; Differential- gleichung für die Tensorpolarisation	17
§4. Die Ermittlung von Relaxationskonstanten aus dem Experiment	26
§5. Der stationäre Fall: Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit und die Temperaturen	32
II. <u>Randbedingungen</u>	34
§6. Der Entropiestrom im Gas	34
§7. Die Berechnung der Oberflächenentropieproduktion	37
§8. Die Randbedingungen	41
§9. Vereinfachte Randbedingungen, Differentialglei- chungen und Ansätze für spezielle Probleme	46
TEIL B: KNUDSEN-KORREKTUREN AM SENFTLEBEN-BEENAKKER- EFFEKT DER VISKOSITÄT	51
§10. Vorbemerkungen. Isotrope Lösungen.	52
I. <u>Strömung zwischen parallelen Platten</u>	56
§11. Berechnung der Anisotropiegrößen und des Feld- einflusses auf die Strömung	56
§12. Diskussion der Lösung	64
§13. Vergleich mit dem Experiment	72
II. <u>Strömung im Kreisrohr</u>	83
§14. Berechnung der Anisotropiegrößen und des Feld- einflusses auf die Strömung	83
§15. Diskussion der Lösung und Vergleich mit dem Experiment	90

TEIL C: THERMOMAGNETISCHE DRUCKDIFFERENZ	96
§16. Die Berechnung der Druckdifferenz	97
§17. Diskussion der Druckdifferenz	105
§18. Vergleich mit dem Experiment	109
ANHANG	123
I. Die verschiedenen Definitionen des Entwicklungstensors	123
II. Einige Eigenschaften der Projektionstensoren 21-ter Stufe	124
III. Die Wirkung der $\mathcal{P}^{(m)}$ auf spezielle Tensoren 2. Stufe	126
IV. Bemerkungen zur Brückenordnung	127
V. Berechnung der "isotropen" Differenztemperatur für das wärmeleitende Gas zwischen parallelen Platten	129
LITERATURVERZEICHNIS	132

LISTE DER BEZEICHNUNGEN

Für Vektoren und Tensoren wird häufig die Indexschreibweise verwendet, v_μ , $a_{\mu\nu}$; die griechischen Indizes beziehen sich auf ein cartesisches Koordinatensystem, $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Daneben werden Vektoren und Tensoren auch durch einfaches bzw. mehrfaches Unterstreichen gekennzeichnet, $\underline{v}$, $\underline{a}$. Es gilt die Summationsvorschrift: $\sum_{\mu=\lambda}^3 a_\mu b_\mu \equiv a_\mu b_\mu \equiv \underline{a} \cdot \underline{b}$.

Die folgenden Symbole werden benutzt:

- $\overline{\dots}$ Bildung des symmetrisch irreduziblen Tensors, z.B.
 $\overline{a_\mu b_\nu} = \frac{1}{2}(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu) - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} a_\lambda b_\lambda$;
 $\langle \dots \rangle$ Nichtgleichgewichtsmittelwert gebildet mit f , p.9 ;
 $\langle \dots \rangle_0$ Gleichgewichtsmittelwert gebildet mit f_0 , p.9 .

Es folgen die häufiger auftretenden Bezeichnungen.

Lateinische Bezeichnungen

- $a_{\mu \dots \mu_\ell}^{(k)}$ Mittelwert des Entwicklungstensors $\phi_{\mu \dots \mu_\ell}^{(k)}$, p.11
 $\underline{\underline{a}}$ Tensorpolarisation, p.11
 $\underline{a}$, $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{\underline{a}}}$ Zerlegungen von $\underline{a}$ an der Grenzfläche $\mathcal{G}$, p.39,40
 $A_{\eta\tau}$ bestimmt die Größenordnung des SBE der Viskosität, p.23
 a'_{ikt} , a'_{ikt} , a_{ki} , a_{kt} bestimmen die Größenordnung des SBE der Wärmeleitfähigkeit, (3.14,7) p.19,18
 A_{ti} kommt von der Kopplung zwischen $\underline{q}^{tr}$ und $\underline{q}^{rot}$, (3.6) p.18
 a_{Tt} bestimmt den Beitrag der thermischen Gleitung zur thermomagnetischen Druckdifferenz, (11.5) p.57
 $\underline{\underline{b}}$ Strom der Tensorpolarisation, p.11
 $\underline{b}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{\underline{b}}}$ Zerlegungen von $\underline{b}$ an der Grenzfläche $\mathcal{G}$, (7.9) p.40
 $\underline{B}$ "Kaganvektor", p.11
 $\underline{c}$ Molekülgeschwindigkeit, p.7
 $\underline{\underline{C}}$ dimensionslose Molekülgeschwindigkeit, p.8
 c_0 mittlere thermische Molekülgeschwindigkeit, p.10
 c_i , c_t relative rotatorische bzw. translatorische Wärmekapazität eines Moleküls, (1.13) p.10
 $c_{rot}^{(o)}$ rotatorische Wärmekapazität eines Moleküls bei der Temperatur T_0 , p.10

Die folgenden Größen sind dimensionslose Oberflächenkoeffizienten:

- C_a Akkomodation der Tensorpolarisation, p.46,49
 $\tilde{C}_a$ ist proportional zu C_a , (11.2) p.56
 $C_{am} = -C_{ma}$ koppeln $\underline{a}$ und $\underline{v}$, p.47,49
 $\tilde{C}_{am}$ ist proportional zu C_{am} , (11.2) p.56
 $C_{at} = C_{ta}$ koppeln $\underline{a}$ und T , p.47,49
 $\tilde{C}_{at}$ ist proportional zu C_{at} , (16.6) p.100
 C_m mechanischer Gleitkoeffizient, p.47,48,49
 C_t Temperatursprungkoeffizient, p.47,48,49

 d Abstand der parallelen Platten, Fig.1.p.53, Fig.10.p.98
 e' dimensionsloses Verhältnis von η und λ , (4.6) p.27
 $E(J^2)$, E_j Rotationsenergie eines Moleküls, p.7
 f Nichtgleichgewichtsverteilungsfunktion, p.7
 f_o Gleichgewichtsverteilungsfunktion, p.7
 g rotatorischer g -Faktor, p.8
 h Plancksches Wirkungsquantum, $\hbar = h/2\pi$
 $\underline{H}$ Vektor des Magnetfelds, H Betrag von $\underline{H}$, $\underline{h}$ Richtung von $\underline{H}$, p.8
 $H_{\mu\nu}$, $\mathcal{H}_{\mu\nu, \mu'\nu'}$ beschreiben die infinitesimale Drehung eines Vektors bzw. Tensors zweiter Stufe um $\underline{h}$, p.12,20
 $\underline{J}$ Operator des (dimensionslosen) Rotationsdrehimpulses eines Moleküls, j Rotationsquantenzahl, p.7
 k Boltzmann-Konstante
 $\underline{k}$ Kraft des Gases auf die Flächeneinheit des Festkörpers, (7.4) p.39
 k'_n Normalkomponente der Reibungskraft des Gases auf die Flächeneinheit des Festkörpers, (7.4) p.39

Die folgenden Größen sind freie Weglängen im Gas (bei T_o):
 l Viskositätsweglänge harter Kugeln, (4.7) p.27
 l_k, l_T sind mit ω_k bzw. ω_T gebildet, (3.20) p.22
 L_m ($m=0, \pm 1, \pm 2$) hängt von H ab, (3.20) p.22
 L_T ist mit ω_T gebildet, (5.10) p.33
 l_t ist aus λ_{is}^t abgeleitet, p.54

 M Molekülmasse, p.7
 n Teilchendichte im Gas, p.11; n_o Gleichgewichtswert von n , p.7

- $\underline{n}$ äußere Einheitsnormale des Gases auf $\mathcal{G}$, p.34
- Die folgenden Größen sind Knudsen-Korrekturfaktoren:
- n_β , n_γ , n_β^{tr} , n_γ^{tr} , n_β^{long} , n_γ^{long} sind experimentelle Faktoren bei der rechteckigen Kapillare, p. 69,73
- N_∞ , $n_{1/2}$, N_{max} , n_{max} sind berechnete Faktoren bei der rechteckigen Kapillare, p.73
- N_β^{theor} , N_γ^{theor} sind berechnete Faktoren bei der runden Kapillare, p.94,95
- p Druck, p.15 ; p_o Gleichgewichtswert von p ,
- p' isotroper Anteil des Reibungsdrucktensors, (2.14) p.16
- $\underline{p}$ Drucktensor, p.15,16
- $\overline{\underline{p}}$ symmetrisch irreduzibler Anteil von $\underline{p}$, p.11
- $\underline{p}^{\parallel}$, $\underline{p}^\perp$, $\underline{p}^{\text{tr}}$ "Projektionstensoren" zweiter Stufe, p.22
- $\mathcal{P}^{(m)}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2$) Projektionstensoren vierter Stufe, p.20
- Q rotatorische Zustandssumme, p.7
- $\underline{Q}$ Oberflächenwärmestrom, p.38
- $\underline{q}^{\text{rot}}$, $\underline{q}^{\text{tr}}$ rotatorischer bzw. translatorischer Wärmestrom im Gas, p.11
- $\underline{q}$, $\underline{q}'$ Gesamt- bzw. Differenzwärmestrom im Gas, (2.4,5)p.14
- R Radius der runden Kapillare, Fig.2.p.54, Fig.8.p.83
- SBE Senftleben-Beenakker-Effekt
- s_i , s_{it} , s_t Vorzeichen von ω_{ki} , a_{ikt} , ω_{kt} , p.28
- T_{rot} , T_{tr} rotatorische bzw. translatorische Temperatur, p.11
- T , T' Gesamt- bzw. Differenztemperatur, (2.2,3) p.14
- T_o Gleichgewichtswert von T , p.7
- $\underline{v}$ mittlere lokale Gasgeschwindigkeit, p.11

Griechische Bezeichnungen

- ε_m , $\varepsilon_m^{\text{tr}}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2$) sind die relativen Abweichungen der $\eta^{(m)}$ vom feldfreien Wert η , (3.30) p.23
- η Scherviskosität, (3.27) p.23, η_{iso} isotrope Scherviskosität, (3.3) p.17
- $\eta^{(m)}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2$) magnetfeldabhängige Viskositätskoeffizienten nach Hess und Waldmann, (3.29) p.23

$\eta_1, \dots, \eta_5$ magnetfeldabhängige Viskositätskoeffizienten
nach De-Groot und Mazur, (3.31) p.23

η_V Volumviskosität, (2.16) p.16

κ Verhältnis von ω_T und ω_K , p.69

Isotrope Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten:

$\lambda_{iso}^i, \lambda_{iso}^t, \lambda_{iso}^{ti}$ koppelt q^{tr} mit q^{rot} , (3.8) p.18 ; λ_{iso}^{tr} ist
die translatorische Wärmeleitfähigkeit, (5.7) p.32

$\lambda_{iso}, \lambda'_{iso}, \lambda''_{iso}$ koppelt q mit q' , (3.13) p.19 .
 $\lambda, \lambda', \lambda''$ sind die feldfreien Wärmeleitfähigkeiten,
(3.34) p.24

$\underline{\underline{\lambda}}, \underline{\underline{\lambda}}', \underline{\underline{\lambda}}''$ Wärmeleitfähigkeitstensoren, (3.33) p.24

$\underline{\underline{\lambda}}$ beschreibt die Magnetfeldabhängigkeit der Tensoren $\underline{\underline{\lambda}}, \underline{\underline{\lambda}}', \underline{\underline{\lambda}}''$, (3.22) p.22

$\lambda_{||}, \lambda_{\perp}, \lambda_{transv}$ Komponenten von $\underline{\underline{\lambda}}$, (3.36) p.24,25

μ_N Kernmagneton, p.8

$\mathcal{T}$ Tensor vierter Stufe, beschreibt die Magnetfeldabhängigkeit des Viskositätstensors, (3.23) p.22

ρ Massendichte im Gas, p.34

$\mathcal{G}$ Grenzfläche zwischen Gas und Festkörper, p.34

$\mathcal{G}_{..}$ effektiver Wirkungsquerschnitt, gebildet mit $\omega_{..}$, (4.2) p.26; z.B. $\mathcal{G}_{\eta}$, Tabelle 3, p.30

φ_K, φ_T Präzessionswinkel, (3.16) p.21

ϕ relative Abweichung zwischen f und f_0 , p.8

$\phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)}$ allgemeiner Entwicklungstensor, (1.8) p.8

$\psi_{\lambda_1 \mu \nu}$ spezieller Entwicklungstensor (Strom der Tensorpolarisation), p.11

ω_H Präzessionsfrequenz im Magnetfeld, (1.7) p.8

$\omega_{p\ell}^{(K, K')}$ allgemeine Relaxationskonstante, (1.16) p.11; speziell:

$\omega_{\eta}, \omega_{\eta T}$, (3.2) p.17; $\omega_K, \omega_{Kr}, \omega_{Kt}$, (1.17) p.12; $\omega_i, \omega_{Ki}, \omega_{ti}$,

ω_t , (3.6) p.18; ω_T (Tensorpolarisation), (3.15) p.20;

ω_T (Temperaturdifferenz T'), (2.10) p.15 .

ZUSAMMENFASSUNG

Strömungs- und Wärmeleitungsvorgänge in einem mehratomigen Gas im Magnetfeld werden beschrieben durch die folgenden Mittelwerte: die Teilchendichte, die translatorische und die rotatorische Temperatur, die Strömungsgeschwindigkeit, den translatorischen und den rotatorischen Wärmestrom, den Reibungsdrucktensor, die Tensorpolarisation und den Strom der Tensorpolarisation. Die mit Hilfe des Momentenverfahrens aus der linearisierten Waldmann-Snider-Gleichung gewonnenen Transport-Relaxations-Gleichungen liefern im stationären Fall Ansätze für die Wärmeströme, den Reibungsdrucktensor und den Strom der Tensorpolarisation, sowie partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Temperaturen, die Geschwindigkeit und die Tensorpolarisation. Randbedingungen für diese Größen werden nach dem Waldmannschen Verfahren aus der Oberflächenentropieproduktion abgeleitet. Beispielsweise kann der Tensorpolarisationsstrom bei Anwesenheit eines Magnetfelds eine Gleitung des verdünnten mehratomigen Gases an der Wand hervorrufen, die thermomagnetische Gleitung.

In den Anwendungen werden die Knudsen-Korrekturen zum Senftleben-Beenakker-Effekt der Viskosität berechnet für die Strömung zwischen parallelen Platten und im Kreisrohr. Ferner wird, in der Eintemperatur-Näherung, eine Theorie der thermomagnetischen Druckdifferenz entwickelt.

Der Vergleich mit dem Experiment liefert Werte für die phänomenologischen Oberflächenkoeffizienten für die Gase HD, CH₄, CO und N₂.

EINLEITUNG

Die im Jahre 1957 von L. Waldmann ¹⁾ und davon unabhängig 1960 von R.F. Snider ²⁾ aufgestellte quantenmechanische Transportgleichung für Teilchen mit inneren, entarteten Energieniveaus ist die Grundlage zur Behandlung von Nichtgleichgewichtsprozessen in verdünnten mehratomigen Gasen. Mit Hilfe des Momentenverfahrens ³⁾⁴⁾ wird aus der linearisierten Waldmann-Snider-Gleichung ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die Mittelwerte abgeleitet. Diese Transport-Relaxations-Gleichungen sind der Ausgangspunkt zur Berechnung vieler Phänomene, so beispielsweise des Senftleben-Beenakker-Effekts (SBE) ⁵⁾, der in der Beeinflussung von Wärmeleitung und innerer Reibung in mehratomigen Gasen durch elektrische und magnetische Felder besteht. Der SBE zeigt indirekt das Vorhandensein von Ausrichtungen in strömenden und wärmeleitenden Gasen, einen direkten Nachweis dieser durch Stöße erzeugten Polarisierungen liefert, nach S. Hess ⁶⁾, die Strömungs- und Wärmeleitungsdoppelbrechung. Fluktuationen dieser Polarisierungen um ihren Gleichgewichtswert sind die Ursache für die depolarisierte Rayleigh-Streuung ^{6b)7)}. Die bisher genannten Erscheinungen sind charakteristisch für mehratomige Gase von nicht zu geringer Dichte, in denen Randeffekte keine Rolle spielen, die Stöße der Gasmoleküle untereinander also allein ausschlaggebend sind. Sie lassen sich quantitativ beschreiben durch einige wenige Relaxationskonstanten, die durch den linearisierten Stoßoperator der Waldmann-Snider-Gleichung bestimmt sind.

Bei geringerer Dichte, wenn die freie Weglänge vergleichbar wird mit Gefäßabmessungen, ist nicht nur die Wechselwirkung der Gasmoleküle untereinander von Bedeutung, sondern ebenso wichtig ist ihre Wechselwirkung mit den Gefäßwänden. Das zeigt sich beispielsweise in Messungen des SBE bei niedrigem Druck in einer über die bekannte H/p -Abhängigkeit hinausgehenden zusätzlichen Druckabhängigkeit ⁸⁻¹¹⁾. Diese Knudsen-Korrekturen beruhen darauf, daß die effektiven Rela-

xationskonstanten jetzt nicht nur die Gas-Gas-Stöße, sondern auch die Gas-Wand-Stöße enthalten.

Bei anderen Erscheinungen in verdünnten mehratomigen Gasen sind die Gas-Wand-Stöße nicht nur eine Korrektur, sondern genau so wichtig für das Auftreten eines Effekts wie die Gas-Gas-Stöße. Das zeigt sich deutlich an einem von Scott, Sturmer und Williamson ¹²⁾ entdeckten Phänomen: Sie beobachteten, daß ein in einem mehratomigen Gas aufgehängter, heißer Zylinder beim Einschalten eines Magnetfelds ein Drehmoment erfährt, dessen Maximalwert umgekehrt proportional zum Druck ist. Zwei Erklärungsmöglichkeiten werden diskutiert: Levi, McCourt und Beenakker ¹³⁾ berechneten das Drehmoment beim Scott-Effekt mit Hilfe der im verdünnten Gas auftretenden thermischen Drucke, die mit zweiten Ableitungen der Temperatur zusammenhängen und durch die Gas-Gas-Wechselwirkung bestimmt sind. Dagegen zeigte Waldmann ¹⁴⁾ die Bedeutung von Gleiteffekten des Gases am Zylinder, also der Gas-Wand-Wechselwirkung auf. Wichtig ist dabei neben der thermischen Gleitung besonders die thermomagnetische Gleitung, die durch eine Kopplung der Gleitgeschwindigkeit an der Wand mit den Polarisierungen des Gases beschrieben wird.

Nun hat Waldmann ¹⁴⁾ ein Experiment vorgeschlagen, an dem die Gleiteffekte allein studiert werden können: In einem verdünnten mehratomigen Gas zwischen parallelen Platten von verschiedener Temperatur sollten beim Anlegen eines Magnetfelds Druckgradienten entstehen, die senkrecht zum Feld und zum Temperaturgradienten sind. Da es bei dieser ebenen Geometrie keine zweiten Ableitungen der Temperatur gibt, sind die auftretenden Druckunterschiede allein durch die Gleitung des Gases an der Wand bestimmt. Eine solche thermomagnetische Druckdifferenz wurde kürzlich von Hulsman e.a. ¹⁵⁾ zuerst an Stickstoff beobachtet; weitere Messungen an anderen Gasen werden zur Zeit von Hermans e.a. ¹⁶⁾ durchgeführt.

Der Einfluß eines Magnetfelds auf die von einem wärmeleitenden mehratomigen Gas auf eine Scheibe ausgeübte Kraft wurde in Experimenten von Larchez und Adair ¹⁷⁾ untersucht; die Berechnung dieser thermomagnetischen Kraft auf eine Kugel wurde

von Hess ¹⁸⁾ ausgeführt. Hydrodynamische Rechnungen zur diffusiophoretischen Kraft und zur Reibungskraft im Magnetfeld wurden von Raum ¹⁹⁾ gemacht.

Eine allgemeine kinetische Behandlung des komplizierten Problems gleichzeitiger Gas-Gas- und Gas-Wand-Stöße ist bisher noch nicht durchgeführt worden. Ein häufig verwendetes Verfahren besteht darin, die kinetische Gleichung für die Gas-moleküle zu ergänzen durch eine Randbedingung für die Verteilungsfunktion; der diese Randbedingung vermittelnde Integral-kern enthält summarisch die Gas-Wand-Wechselwirkung. In der Dissertation von J. Halbritter ²⁰⁾ wird ein solcher Kern berechnet aus der Lösung des quantenmechanischen Streuproblems für ein einfaches Potential zwischen einer starren Wand und einem zweiatomigen Molekül; ferner werden aus der Randbedingung für die Verteilungsfunktion Randbedingungen für die Mittelwerte im Gas abgeleitet, u.a. wird ein Ausdruck für die thermomagnetische Gleitung angegeben.

Ein ganz allgemeines Verfahren zur Aufstellung von phänomenologischen Randbedingungen für die Mittelwerte geht nach Waldmann ²¹⁾ von der Entropieproduktion an der Grenzfläche Gas-Wand aus; die Oberflächenentropieproduktion besteht in einer Unstetigkeit der Entropieströme an der Wand. Dieses Verfahren wird hier durchgeführt für ein mehratomiges verdünntes Gas, dessen Nichtgleichgewichtszustand durch die folgenden Mittelwerte beschrieben werden kann: Teilchendichte, translatorische und rotatorische Temperatur, Strömungsgeschwindigkeit, translatorischen und rotatorischen Wärmestrom, Reibungsdrucktensor, Tensorpolarisation (gebildet aus dem Rotationsdrehimpuls der Moleküle) und Strom der Tensorpolarisation. Die beiden letztgenannten Größen charakterisieren die Ausrichtungseffekte und vermitteln den Einfluß eines Magnetfelds auf die Transportvorgänge über das mit dem Rotationsdrehimpuls der Moleküle verknüpfte magnetische Moment. Es ergeben sich gekoppelte Randbedingungen für die Temperaturen, die Geschwindigkeit und die Tensorpolarisation; so gibt es einerseits eine thermomagnetische Gleitung aufgrund tangentialer Komponenten des Tensorpolarisationsstroms an der Wand,

andererseits wird eine Tensorpolarisation erzeugt durch die Wechselwirkung des Gases mit der Wand. Zwischen den nichtdiagonalen Kopplungskoeffizienten bestehen Onsager-Beziehungen. Die Randbedingungen werden benötigt zur Lösung der im stationären Fall aus den Transport-Relaxations-Gleichungen abgeleiteten Differentialgleichungen für die Temperaturen, die Geschwindigkeit und die Tensorpolarisation. In den Anwendungen wird der Einfluß der Ausrichtungseffekte und damit auch des Magnetfelds auf die Strömung und Wärmeleitung in einer Störungsrechnung berücksichtigt.

In diesem Sinne wird das System aus Differentialgleichungen und Randbedingungen gelöst für folgende Transportvorgänge in verdünnten mehratomigen Gasen im Magnetfeld: Für die Strömung zwischen ebenen Platten und im Kreisrohr bei vorgegebenem Druckgradienten und für die Wärmeleitung zwischen ebenen Platten bei vorgegebenem Temperaturgradienten. Aus den Strömungsproblemen ergeben sich die Knudsen-Korrekturen am SBE der Viskosität, die schon von Korving⁸⁾ und später sehr genau von Hulsman e.a.⁹⁾¹⁰⁾ gemessen wurden. Das Wärmeleitungsproblem führt zu einer Erweiterung der ursprünglichen Waldmannschen Theorie¹⁴⁾ der thermomagnetischen Druckdifferenz²²⁾, vor allem bezüglich der Druck- und der Winkelabhängigkeit. Für jedes der vier Gase HD, CH₄, CO und N₂ wird ein Satz von Oberflächenparametern bestimmt, der die experimentellen Daten der Knudsen-Korrekturen am SBE der Viskosität⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾ und der thermomagnetischen Druckdifferenz¹⁵⁾¹⁶⁾ beschreibt. Eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment wird gefunden.



TEIL A

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RANDBEDINGUNGEN

FÜR

MEHRATOMIGE GASE IM MAGNETFELD

I. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

§1. Das spezielle System der Transport-Relaxations-Gleichungen

Für ein reines Gas aus rotierenden Molekülen werden Transport-Relaxations-Gleichungen aufgestellt in enger Anlehnung an Arbeiten von Köhler ²³⁾, Hess ^{6b)} und Raum und Köhler ⁴⁾.

Die Translationsbewegung wird klassisch behandelt, $\underline{x}$ und $\underline{c}$ bezeichnen Ort und Geschwindigkeit eines Moleküls. Die Rotation wird quantenmechanisch behandelt: Der Operator des Rotationsdrehimpulses (in Einheiten von $\hbar$) werde mit $\underline{J}$ bezeichnet, die zugehörige Rotationsquantenzahl mit j ; er genügt den Vertauschungsrelationen

$$J_\mu J_\nu - J_\nu J_\mu = i \epsilon_{\mu\nu\lambda} J_\lambda \quad (1)$$

Der Operator der inneren Energie eines Moleküls mit dem Trägheitsmoment Θ ist

$$E(J^2) = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J^2 \quad (2)$$

die Rotationsenergie im Zustand j ist also $E_j = \frac{\hbar^2}{2\Theta} j(j+1)$.

Der Nichtgleichgewichtszustand des verdünnten Gases wird durch die Einteilchen-Verteilungsfunktion $f(t, \underline{x}, \underline{c}, \underline{J}, \dots)$ beschrieben, sie ist ein Operator bezüglich der Quantenzahlen j und m ($-j \leq m \leq j$). Die Gleichgewichtsverteilung des ruhenden Gases der Dichte n_0 und der Temperatur T_0 ist diagonal bezüglich der Rotationsquantenzahl j

$$f_0(\underline{c}, \underline{J}) = n_0 Q^{-1} \left(\frac{M}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{M \underline{c}^2}{2k T_0} - \frac{E(J^2)}{k T_0} \right) \quad (3)$$

wobei M die Masse eines Moleküls ist und k die Boltzmannsche Konstante; Q ist die Zustandssumme für die Rotation

$$Q = \sum_j (2j+1) \exp \left(\frac{-E_j}{k T_0} \right) .$$

Der in j diagonale Anteil der Verteilungsfunktion werde in der Form

$$f(t, \underline{x}, \underline{c}, \underline{J}) = f_0(\underline{c}, \underline{J}) \left[1 + \phi(t, \underline{x}, \underline{c}, \underline{J}) \right] \quad (4)$$

geschrieben; die Größe ϕ charakterisiert die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht, sie genügt der linearisierten Waldmann-Snyder-Gleichung ^{1)4)6b)}

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{c} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}^{\text{int}}, \phi] + \omega(\phi) = 0 \quad (5)$$

Der Hamilton Operator der inneren Rotation $\mathcal{H}^{\text{int}}$ ist im vorliegenden Fall diamagnetischer Moleküle, mit dem rotatorischen magnetischen Moment $\underline{\mu}$, im Magnetfeld $\underline{H} = H \underline{h}$ ($\underline{h} \cdot \underline{h} = 1$) gegeben durch

$$\mathcal{H}^{\text{int}} = - \underline{\mu} \cdot \underline{H} = - \hbar \omega_H \underline{J} \cdot \underline{h} \quad (6)$$

wobei
$$\omega_H = \gamma H = \frac{1}{\hbar} g \mu_N H \quad (7)$$

die Präzessionsfrequenz im Feld H ist, μ_N bezeichnet das Kernmagneton.

In diesem Abschnitt wird nicht die explizite Gestalt des linearisierten Stoßoperators $\omega(\phi)$ benötigt, sondern nur einige allgemeine Eigenschaften werden verwendet.

Beim Momentenverfahren ³⁾⁴⁾ wird nun die Größe ϕ nach einem vollständigen System irreduzibler Tensoren entwickelt, die aus den dimensionslosen Vektoren $\underline{c} = \underline{c} \left(\frac{M}{2kT} \right)^{1/2}$ und $\underline{J}$ aufgebaut sind. In jedem praktischen Fall muß^o man sich auf die Berücksichtigung einiger weniger Entwicklungstensoren beschränken; wir machen nun den speziellen Ansatz

$$\phi(t, \underline{x}, \underline{c}, \underline{J}) = \sum_{\lambda=0}^2 \sum_{\kappa=-\lambda}^{N_\lambda} \phi_{\mu_\lambda \dots \mu_\lambda}^{(\kappa)}(\underline{c}, \underline{J}) a_{\mu_\lambda \dots \mu_\lambda}^{(\kappa)}(t, \underline{x}) + \psi_{\lambda, \mu \nu} b_{\lambda, \mu \nu} \quad (8)$$

mit $N_0 = 3$, $N_1 = 3$, $N_2 = 2$. Die Entwicklungstensoren

haben die Parität $(-1)^l$, sie sind symmetrisch irreduzibel in allen Indizes (für $l \geq 2$) und erfüllen die Normierung

$$\langle \phi_{\mu_\lambda \dots \mu_\lambda}^{(\kappa)} \phi_{\mu'_\lambda \dots \mu'_\lambda}^{(\kappa')} \rangle_0 = \delta_{\ell \ell'} \delta^{\kappa \kappa'} \Delta_{\mu_\lambda \dots \mu_\lambda, \mu'_\lambda \dots \mu'_\lambda}^{(\ell)} \quad (9)$$

Der Mittelwert von $\phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)}$ berechnet sich nach

$\langle \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} \rangle = \sum_{\underline{J}} \text{tr} \int \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)}(\underline{C}, \underline{J}) \frac{1}{n} f(t, \underline{x}, \underline{C}, \underline{J}) d^3c$, entsprechend bezeichnet $\langle \dots \rangle_0$ die Mittelung über die Gleichgewichtsverteilung.

Es ist $\Delta^{(0)} = 1$, $\Delta_{\mu\nu}^{(4)} = \delta_{\mu\nu}$, $\Delta_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'}) - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}$ ist symmetrisch irreduzibel im vorderen und

hinteren Indexpaar.

Der Tensor $\psi_{\lambda, \mu\nu}^{(2)} = \sqrt{2} C_\lambda \phi_{\mu\nu}^{(2)}$ ist nur symmetrisch irreduzibel bezüglich μ, ν , nicht aber bezüglich λ, μ oder λ, ν . Die Tatsache, daß $\psi_{\lambda, \mu\nu}$ in der Entwicklung von ϕ nicht in seine irreduziblen Bestandteile (in Köhlers ²³⁾ Bezeichnung)

$$\phi_{\mu}^{(5)} = \sqrt{\frac{6}{5}} \phi_{\mu\lambda}^{(2)} C_\lambda, \quad \psi_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{\phi_{\mu\lambda}^{(2)} \varepsilon_{\nu\lambda\kappa} C_\kappa},$$

$$\phi_{\mu\nu\lambda}^{(2)} = \sqrt{2} \overline{\phi_{\mu\nu}^{(2)} C_\lambda}$$

zerlegt wurde, bedeutet die Annahme der Gleichheit der Relaxationskonstanten dieser drei Größen

$$\omega_{-1}^{(55)} = \omega_{-2}^{(22)} = \omega_{-3}^{(22)} \equiv \omega_K, \quad (10)$$

das ist wohl begründet bei kleiner Nichtsphärizität der Molekülwechselwirkung ²³⁾. Hier wird stets die Gültigkeit von (10) vorausgesetzt. Für $\psi_{\lambda, \mu\nu}$ gilt die Normierung

$$\langle \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} \psi_{\lambda, \mu\nu} \rangle_0 = 0, \quad \langle \psi_{\lambda, \mu\nu} \psi_{\lambda', \mu'\nu'} \rangle_0 = \delta_{\lambda\lambda'} \Delta_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(2)}. \quad (11)$$

Für $\phi = 1$ ist $a^{(1)} = \frac{n - n_0}{n_0}$, die übrigen Funktionen ergeben sich als Nichtgleichgewichtsmittelwerte der zugehörigen Entwicklungstensoren

$$a_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} = \frac{n}{n_0} \langle \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} \rangle \approx \langle \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} \rangle, \quad b_{\lambda, \mu\nu} = \frac{n}{n_0} \langle \psi_{\lambda, \mu\nu} \rangle \approx \langle \psi_{\lambda, \mu\nu} \rangle. \quad (12)$$

Die Mittelwerte $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $\underline{a}^{(1)}$, $\underline{a}^{(3)}$, $\underline{a}^{(4)}$ und $\underline{a}^{(1)}$ entsprechen den folgenden physikalischen Größen: der translatorischen Temperatur T_{tr} , der rotatorischen Temperatur T_{rot} , der Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v}$, dem translatorischen Wärmestrom $\underline{q}_{tr}$, dem rotatorischen Wärmestrom $\underline{q}_{rot}$ und dem symme-

trisch irreduziblen Anteil des Reibungsdrucktensors $\overline{\underline{p}}$. Es ist $\underline{a}^{(2)} = \underline{a}$ die Tensorpolarisation und $\underline{b}$ ist der Strom der Tensorpolarisation. Die beiden letztgenannten Größen beschreiben die im strömenden und wärmeleitenden Gas auftretenden Ausrichtungseffekte, sie vermitteln ferner den Einfluß des Magnetfelds auf die Transportvorgänge im Gas: die Präzession des mit $\underline{J}$ verknüpften magnetischen Moments $\underline{\mu}$ im äußeren Feld verändert die Mittelwerte $\underline{a}$ und $\underline{b}$, die ihrerseits mit $\overline{\underline{p}}$, q_{tr} und q_{rot} gekoppelt sind. Die experimentelle Erfahrung zeigt, daß $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$ und $\psi_{\lambda,\mu\nu}$ die dominanten Entwicklungstensoren für den SBE der Viskosität⁸⁻¹⁰⁾ (Ausnahme ist $NH_3^{44d)}$ bzw. Wärmeleitfähigkeit¹¹⁾²⁴⁾ der meisten diamagnetischen Moleküle darstellen.

In der folgenden Tabelle 1 sind die verwendeten Entwicklungstensoren und die zugehörigen Mittelwerte explizit angegeben.

Dabei bedeuten $c_o = (\frac{3kT_o}{M})^{1/2}$ eine charakteristische Geschwindigkeit eines Moleküls, $\xi(J^2) = E(J^2)/kT_o$ seine dimensionslose Rotationsenergie und c_t , c_i die relative translatorische bzw. rotatorische Wärmekapazität (bei T_o)

$$c_t = \frac{3/2 k}{3/2 k + c_{rot}}(o), \quad c_i = \frac{c_{rot}^{(o)}}{3/2 k + c_{rot}}(o) \quad (13)$$

Für den Entwicklungstensor $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$ werden in der Literatur verschiedene Versionen verwendet; die Größe $R(J^2)$ genügt dabei stets der "Normierungsbedingung"

$$\langle R^2 J^2 (J^2 - \frac{3}{4}) \rangle_o = 1 \quad (14)$$

Die spezielle Wahl von $R(J^2)$ (siehe dazu Anhang I) ist nur dann entscheidend, wenn die Relaxationskonstanten $\omega_{t_2}^{(21)}$, $\omega_{t_2}^{(22)}$ aus einem Molekülpotential berechnet werden²³⁾, nicht aber für die Gestalt der Transport-Relaxations-Gleichungen.

Zur Herleitung der Transport-Relaxations-Gleichungen wird nun die Entwicklung (8) für ϕ in die linearisierte Waldmann-Snider-Gleichung (5) eingesetzt, dann werden die Momente dieser Gleichung gebildet³⁾⁴⁾²³⁾. Das Ergebnis ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen, die linear in den

Tabelle 1 : Spezielle Entwicklungstensoren und Mittelwerte

Entwicklungstensor	Bedeutung des Mittelwerts
$\phi^{(1)} = 1$	$a^{(1)} = \frac{n-n_0}{n_0}$ Teilchendichte
$\phi^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} (C^2 - \frac{3}{2})$	$a^{(2)} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{T_{tr} - T_0}{T_0}$ translatorische Temperatur
$\phi^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{C_t}{C_i} (\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle_0)$	$a^{(3)} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{C_i}{C_t} \frac{T_{rot} - T_0}{T_0}$ rotatorische Temperatur
$\phi_\mu^{(1)} = \sqrt{2} C_\mu$	$a_\mu^{(1)} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_\mu}{c_0}$ Strömungsgeschwindigkeit
$\phi_\mu^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{5}} C_\mu (C^2 - \frac{5}{2})$	$a_\mu^{(3)} \approx \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{p_0 c_0} q_\mu^{tr}$ translatorischer Wärmestrom
$\phi_\mu^{(4)} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{C_t}{C_i} C_\mu (\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle_0)$	$a_\mu^{(4)} \approx \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{C_t}{C_i}}{p_0 c_0} q_\mu^{rot}$ rotatorischer Wärmestrom
$\phi_{\mu\nu}^{(1)} = \sqrt{2} \overline{C_\mu C_\nu}$	$a_{\mu\nu}^{(1)} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{p_0} \overline{p_{\mu\nu}}$ Reibungsdrucktensor
$\phi_{\mu\nu}^{(2)} = \sqrt{\frac{15}{2}} R(J^2) \overline{J_\mu J_\nu}$	$a_{\mu\nu}^{(2)} \approx \langle \phi_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \equiv a_{\mu\nu}$ Tensorpolarisation
$\psi_{\lambda, \mu\nu} = \sqrt{2} C_\lambda \phi_{\mu\nu}^{(2)}$	$b_{\lambda, \mu\nu} \approx \langle \psi_{\lambda, \mu\nu} \rangle$ Strom der Tensorpolarisation

Zeit- und Ortsableitungen sind, wie aus Tabelle 2 hervorgeht. Den Kaganvektor $\underline{B}$, der mit den Wärmeströmen gekoppelt ist, erhält man aus dem Strom der Tensorpolarisation $\underline{b}$ durch Verjüngung:

$$B_\mu = b_{\lambda, \lambda \mu} \quad (= \sqrt{\frac{5}{3}} a_\mu^{(5)} \text{ nach } ^{23}), \quad (15)$$

Die Relaxationskonstanten $\omega_{PL}^{(KK')}$ sind Matricelemente des linearisierten Waldmann-Snider-Stoßoperators

$$\omega_{PL}^{(KK')} = \frac{1}{2\ell+1} \langle \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)} \omega(\phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K')}) \rangle_0 = \omega_{PL}^{(K'K)} T^{(K)} T^{(K')}, \quad (16)$$

wobei $P = (-1)^1$ die Parität und $T^{(K)}$ das Zeitumkehrverhalten des Entwicklungstensors $\phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(K)}$ beschreiben ³⁾⁴⁾.

Außerdem gilt noch

$$\begin{aligned}\omega_{kt} &= \frac{1}{5} \langle \phi_v^{(3)} \omega(\psi_{\lambda, \lambda v}) \rangle_0, \\ \omega_{kr} &= \frac{1}{5} \langle \phi_v^{(4)} \omega(\psi_{\lambda, \lambda v}) \rangle_0, \\ \omega_k &= \frac{1}{45} \langle \psi_{\lambda, \mu v} \omega(\psi_{\lambda, \mu v}) \rangle_0,\end{aligned}\quad (17)$$

und in Köhlers Bezeichnungen ²³⁾ ist $\omega_{kt} = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_{-1}^{(35)}$,
 $\omega_{kr} = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_{-1}^{(45)}$, vergl. auch (10).

Es gibt einige exakte Beziehungen zwischen verschiedenen Relaxationskonstanten. So folgt aus der Tatsache, daß die

$$\text{Größe } \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\phi^{(2)} + \sqrt{\frac{c_i}{c_t}} \phi^{(3)} \right) = \frac{1}{kT_0} \left[\left\langle \frac{M}{2} \varepsilon^2 \right\rangle + \langle E(J^2) \rangle - \left\langle \frac{M}{2} \varepsilon^2 \right\rangle_0 - \langle E(J^2) \rangle_0 \right]$$

eine Stoßinvariante ist, die Relation ⁴⁾²³⁾

$$\omega_{+0}^{(k1)} + \sqrt{\frac{c_i}{c_t}} \omega_{+0}^{(k3)} = 0 \quad (k=2, 3) \quad (18)$$

Aus der speziellen Gestalt von Entwicklungstensoren ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\omega_{-1}^{(32)} = \frac{2}{3} \omega_{+2}^{(14)} + \frac{5}{6} \omega_{+0}^{(22)} \quad \text{nach 13b)25)} \quad (19)$$

$$\omega_{-1}^{(34)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{c_t}{c_i} \omega_{+0}^{(22)} \quad \text{nach 13b)23)25)} \quad (20)$$

$$\omega_{+2}^{(42)} = \sqrt{5} \omega_{kt} \quad \text{nach 4)13b)23)} \quad (21)$$

Neben diesen exakten gibt es noch eine Reihe näherungsweiser Beziehungen für spezielle Potentiale ²³⁾²⁶⁾, die aber hier nicht verwendet werden sollen.

Das Magnetfeld kommt in den Gleichungen für die Tensorpolarisation und den Tensorpolarisationsstrom vor, wobei die Stärke H des Felds in der Präzessionsfrequenz ω_{II} enthalten ist, und seine Richtung $\underline{h}$ im Tensor vierter Stufe

$\mathcal{H}_{\mu\nu, \mu'\nu'}$, der die infinitesimale Drehung eines Tensors zweiter Stufe um $\underline{h}$ beschreibt. Die Eigenschaften von $\mathcal{H}_{\mu\nu, \mu'\nu'}$ und von den daraus abgeleiteten Projektionstensoren $\mathcal{P}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(m)}$

wurden von Hess und Waldmann ²⁷⁾ diskutiert und sind im Anhang II zusammengestellt.

Tabelle 2 : Das spezielle System der Transport-Relaxations-Gleichungen

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(1)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^{(1)}_\nu \\
(2) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(2)} + \frac{c_0}{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{2} a^{(1)}_\nu + \sqrt{5} a^{(3)}_\nu) \\
(3) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(3)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^{(4)}_\nu \\
(4) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(4)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(a^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} a^{(2)} \right) + c_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^{(1)}_{\nu\mu} \\
(5) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(5)} + c_0 \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a^{(2)} + c_0 \sqrt{\frac{4}{15}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^{(1)}_{\nu\mu} \\
(6) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(6)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a^{(3)} + \omega_{-1}^{(33)} a^{(3)}_\mu + \omega_{-1}^{(34)} a^{(4)}_\mu + \omega_{k\pm} B_\mu \\
(7) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(7)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a^{(4)} + \omega_{-1}^{(43)} a^{(3)}_\mu + \omega_{-1}^{(44)} a^{(4)}_\mu + \omega_{kr} B_\mu \\
(8) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(8)} + c_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_\mu} + c_0 \sqrt{\frac{4}{15}} \frac{\partial a^{(3)}}{\partial x_\mu} + \omega_{+2}^{(44)} a^{(4)}_{\mu\nu} + \omega_{+2}^{(42)} a^{(2)}_{\mu\nu} \\
(9) \quad & \frac{\partial}{\partial t} a^{(9)} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} b_{\lambda\mu\nu} + \omega_H \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda\mu'} a_{\mu'\nu'} + \omega_{+2}^{(24)} a^{(4)}_{\mu\nu} + \omega_{+2}^{(22)} a^{(2)}_{\mu\nu} \\
(10) \quad & \frac{\partial}{\partial t} b_{\lambda\mu\nu} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a^{(2)}_{\mu\nu} + \omega_H \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda\mu'} b_{\lambda'\mu'\nu'} + (\omega_{k\pm} a^{(3)}_{\lambda'} + \omega_{kr} a^{(8)}_{\lambda'}) \Delta_{\mu\nu\lambda\lambda'} + \omega_k b_{\lambda\mu\nu} = 0
\end{aligned}$$

§2. Lokale Erhaltungssätze und Temperaturrelaxation

Ersetzt man die Entwicklungskoeffizienten $a_{\mu_1 \dots \mu_e}^{(k)}$ mit Hilfe von Tabelle 1 durch die physikalischen Größen, so erkennt man in einigen der Gleichungen aus Tabelle 2 die linearisierten, lokalen Erhaltungssätze wieder.

So ist Gl.(a) die linearisierte Form

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

der Kontinuitätsgleichung $\frac{dn}{dt} + n \underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right)$.

Für kleine Abweichungen vom Gleichgewicht ist die Temperatur T definiert durch

$$T = c_t T_{tr} + c_i T_{rot} \quad (2)$$

Als zweite Variable wird die "Differenztemperatur" T'

$$T' = T_{tr} - T_{rot} \quad (3)$$

eingeführt; die Umkehrungen von (2) und (3) lauten

$$T_{tr} = T + c_i T' \quad , \quad T_{rot} = T - c_t T' \quad (4)$$

Der Wärmestrom setzt sich aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil zusammen

$$q = q_{tr} + q_{rot} \quad ; \quad (5)$$

als zweite Variable wird die gewichtete Differenz

$$q' = c_i q_{tr} - c_t q_{rot} \quad (6)$$

verwendet. Umgekehrt gilt

$$q_{tr} = c_t q + q' \quad , \quad q_{rot} = c_i q - q' \quad (7)$$

Mit Hilfe von (1.18) werden die Gln. (b) und (c) aus Tabelle 2 umgeschrieben in

$$n_0 \frac{3}{2} k \frac{\partial T_{tr}}{\partial t} + \underline{V} \cdot (q_{tr}^{tr} + p_0 \underline{v}) + n_0 \frac{3}{2} k \omega_{to}^{(22)} (T_{tr} - T_{int}) = 0$$

$$n_0 c_{int}^{(0)} \frac{\partial T_{int}}{\partial t} + \underline{V} \cdot q_{int}^{int} + n_0 \frac{3}{2} k \omega_{to}^{(22)} (T_{int} - T_{tr}) = 0.$$

Durch Addition erhält man hieraus die linearisierte Version

$$n_0 \left(\frac{3}{2} k + c_{int}^{(0)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{V} \cdot (q + p_0 \underline{v}) = 0 \quad (8)$$

des Energiesatzes $n \frac{d}{dt} (u + \frac{1}{2} M v^2) + \underline{V} \cdot (q + p \cdot \underline{v}) = 0.$

Für die Differenztemperatur T' folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \omega_{T'} T' + \frac{2}{3} T_0 \underline{V} \cdot \left(\underline{v} + \frac{1}{p_0 c_i} q' \right) = 0, \quad (9)$$

demnach klingt T' im räumlich homogenen Gas mit der Zeitkonstanten $\tau = 1/\omega_{T'}$,

$$\omega_{T'} = \frac{1}{c_i} \omega_{to}^{(22)}, \quad (10)$$

auf den Wert Null ab, im inhomogenen Gas hat sich T' (im quasistationären Fall) nach der Zeit τ auf den Wert

$$T' = - \frac{2}{3} \frac{T_0}{\omega_{T'}} \underline{V} \cdot \left(\underline{v} + \frac{1}{p_0 c_i} q' \right) \quad (11)$$

eingestellt.

Über die ideale Zustandsgleichung des verdünnten Gases wird nun der Druck p eingeführt: $p = n k T$; in linearer Näherung ist dann

$$\frac{n - n_0}{n_0} + \frac{T_{tr} - T_0}{T_0} = \frac{p - p_0}{p_0} + \frac{c_i T'}{T_0}.$$

Damit folgt aus Gl.(d) von Tabelle 2 die linearisierte Form

$$n_0 M \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{p} + \underline{V} p + c_i \frac{p_0}{T_0} \underline{V} T' = 0 \quad (12)$$

des allgemeinen Impulssatzes $n M \frac{d \underline{v}}{dt} + \underline{V} \cdot \underline{p} = 0.$

Wird der Drucktensor in seine irreduziblen Bestandteile zer-

legt

$$p = \bar{p} + \delta (p + p') \quad , \quad (13)$$

so zeigt sich, daß der skalare Anteil p' des Reibungsdrucktensors proportional zur Differenztemperatur T' ist

$$p' = c_i \frac{p_o}{T_o} T' \quad . \quad (14)$$

Für nicht zu hochfrequente Vorgänge kann T' nach (11) ersetzt werden, dann ist

$$p' = -\eta_v \nabla \cdot \left(\underline{v} + \frac{1}{p_o c_i} q' \right) \quad . \quad (15)$$

Die Volumviskosität

$$\eta_v = \frac{2}{3} c_i \frac{p_o}{\omega_T} \quad (16)$$

hängt also mit der Zeitkonstante τ der Temperaturrelaxation zusammen ²⁸⁾²⁵⁾; im hydrodynamischen Bereich kann der Term

$\frac{1}{p_o c_i} q'$ gegenüber $\underline{v}$ vernachlässigt werden.

§3. Der quasistationäre Fall: Ansätze; Differentialgleichung für die Tensorpolarisation.

Im quasistationären Fall, dh. bei nicht zu hochfrequenten Vorgängen, können in den Gleichungen (e) - (i) aus Tabelle 2 die Zeitableitungsterme gegen die Relaxationsterme vernachlässigt werden. Daraus ergeben sich dann "Ansätze" für den Reibungsdrucktensor, die Wärmeströme und den Strom der Tensorpolarisation, sowie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Tensorpolarisation.

(a) Ansätze für den Reibungsdrucktensor und die Wärmeströme

Für den skalaren Anteil des Reibungsdrucktensors gilt der Ansatz (2.15), für den symmetrisch irreduziblen Anteil folgt aus Gl.(g) von Tabelle 2

$$\underline{\underline{p}} = -2\eta_{iso} \left[\underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}} + \frac{2}{5} \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{v}} \underline{\underline{q}}^{tr} \right] - p_0 \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}} \underline{\underline{a}} \quad (1)$$

dabei wurden die Abkürzungen

$$\omega_{\eta} = \omega_{+2}^{(11)} \quad , \quad \omega_{\eta T} = \omega_{+2}^{(12)} = \omega_{+2}^{(21)} \quad (2)$$

verwendet, und

$$\eta_{iso} = \frac{p_0}{\omega_{\eta}} \quad (3)$$

ist die "isotrope" Scherviskosität, die sich bei Abwesenheit der Tensorpolarisation ergibt. Der Einfluß eines Magnetfelds auf die Strömungsvorgänge erfolgt somit über die Kopplung der feldabhängigen Tensorpolarisation an den Drucktensor $\underline{\underline{p}}$.

Die beiden Gln. (e) und (f), die durch die Relaxationskonstante $\omega_{-1}^{(34)}$ gekoppelt sind, liefern für die Wärmeströme

$$\underline{\underline{q}}^{tr} = -\lambda_{iso}^t \left[\underline{\underline{v}} \underline{\underline{T}}_{tr} + \frac{2}{5} \frac{\underline{\underline{T}}_0}{\rho_0} \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{p}} \right] - \lambda_{iso}^{ti} \underline{\underline{v}} \underline{\underline{T}}_{rot} \quad (4)$$

$$- \frac{p_0 \zeta_0}{\sqrt{2}} \underline{\underline{B}} \quad a_{kt} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} (1 - A_{ti})^{-1/2}$$

$$q_{\text{rot}} = -\lambda_{\text{iso}}^{it} \left[\nabla T_{\text{tr}} + \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} \nabla \cdot \underline{\underline{P}} \right] - \lambda_{\text{iso}}^i \nabla T_{\text{rot}} - \frac{p_0 c_0}{\sqrt{2}} \underline{\underline{B}} a_{ki} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_i}} (1 - A_{ti})^{-1/2} \quad (5)$$

Hierbei wurden die folgenden neuen Bezeichnungen

$$\omega_t = \omega_{-1}^{(33)}, \quad \omega_i = \frac{5}{3} \frac{c_t}{c_i} \omega_{-1}^{(44)}, \quad \omega_{ti} = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{c_t}{c_i}} \omega_{-1}^{(34)}, \quad (6)$$

$$A_{ti} = \frac{(\omega_{ti})^2}{\omega_t \omega_i} = \frac{(\omega_{-1}^{(34)})^2}{\omega_{-1}^{(33)} \omega_{-1}^{(44)}}, \quad \omega_{ki} = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{c_t}{c_i}} \omega_{kr},$$

und Abkürzungen

$$a_{kt} = (1 - A_{ti})^{-1/2} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\frac{\omega_{kt}}{\sqrt{\omega_k \omega_t}} + \frac{\omega_{ki}}{\sqrt{\omega_k \omega_i}} \frac{(-\omega_{ti})}{\sqrt{\omega_t \omega_i}} \right] \quad (7)$$

$$a_{ki} = (1 - A_{ti})^{-1/2} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\frac{\omega_{ki}}{\sqrt{\omega_k \omega_i}} + \frac{\omega_{kt}}{\sqrt{\omega_k \omega_t}} \frac{(-\omega_{ti})}{\sqrt{\omega_t \omega_i}} \right]$$

eingeführt. Die isotropen Werte der Wärmeleitfähigkeiten

$$\lambda_{\text{iso}}^t = \frac{5}{2} \frac{k}{M} \frac{p_0}{\omega_t} (1 - A_{ti})^{-1}, \quad \lambda_{\text{iso}}^i = \frac{5}{2} \frac{k}{M} \frac{p_0}{\omega_i} (1 - A_{ti})^{-1}, \quad (8)$$

$$\lambda_{\text{iso}}^{it} = \lambda_{\text{iso}}^{ti} = \frac{5}{2} \frac{k}{M} \frac{p_0 (-\omega_{ti})}{\omega_t \omega_i} (1 - A_{ti})^{-1}$$

gelten für den Fall der Abwesenheit des Kaganvektors; sie sind positiv

$$\lambda_{\text{iso}}^t, \lambda_{\text{iso}}^i, \lambda_{\text{iso}}^{it} > 0, \quad \lambda_{\text{iso}}^t \lambda_{\text{iso}}^i - (\lambda_{\text{iso}}^{it})^2 > 0 \quad (9)$$

aufgrund der Relation (1.20) und der Tatsache, daß die Matrix der Relaxationskonstanten positiv definit ist ³⁾.

Wenn der "Burnett-Term" $T_0 p_0^{-1} \nabla \cdot \underline{\underline{P}}$ keine Rolle spielt, wird die Feldabhängigkeit der Wärmeströme allein durch den Kaganvektor bestimmt.

Nun sollen noch die Temperatur T und die Differenztemperatur T' in den Gesamtwärmestrom q und in den Differenz-

wärmestrom $\underline{q}'$ eingeführt werden:

$$\underline{q} = -\lambda_{iso} \underline{\nabla} T - \lambda_{iso}'' \underline{\nabla} T' - \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} (\lambda_{iso}^t + \lambda_{iso}^{it}) \underline{\nabla} \cdot \underline{p} \\ - \frac{p_0 c_0}{\sqrt{2}} \underline{B} a_{ikt} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t} \frac{\lambda_{iso}}{\lambda_{iso}^t}} (1 - A_{ti})^{-1/2} \quad (10)$$

$$\underline{q}' = -\lambda_{iso}'' \underline{\nabla} T - \lambda_{iso}' \underline{\nabla} T' - \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} (c_i \lambda_{iso}^t - c_t \lambda_{iso}^{it}) \underline{\nabla} \cdot \underline{p} \\ - \frac{p_0 c_0}{\sqrt{2}} \underline{B} a'_{ikt} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t} \frac{\lambda_{iso}'}{\lambda_{iso}^t}} (1 - A_{ti})^{-1/2} \quad (11)$$

Die Matrix der Wärmeleitfähigkeiten

$$\lambda_{iso} = \lambda_{iso}^t + \lambda_{iso}^i + 2\lambda_{iso}^{ti}, \quad \lambda_{iso}'' = c_i \lambda_{iso}^t - c_t \lambda_{iso}^i + (c_i - c_t) \lambda_{iso}^{ti}, \quad (12) \\ \lambda_{iso}' = c_i^2 \lambda_{iso}^t + c_t^2 \lambda_{iso}^i - 2c_i c_t \lambda_{iso}^{ti}$$

ist positiv definit:

$$\lambda_{iso} > 0, \quad \lambda_{iso}' > 0, \\ \lambda_{iso} \lambda_{iso}' - (\lambda_{iso}'')^2 = \lambda_{iso}^t \lambda_{iso}^i - (\lambda_{iso}^{ti})^2 > 0. \quad (13)$$

Diese Ausdrücke für die isotropen Wärmeleitfähigkeiten wurden aus der Waldmann-Snider-Gleichung abgeleitet unter Vernachlässigung der Anisotropieeffekte, sie stimmen daher überein mit den aus der Wang Chang-Uhlenbeck-Gleichung erhaltenen Resultaten (28)25).

Die Größen

$$a_{ikt} = \sqrt{\frac{\lambda_{iso}^t}{\lambda_{iso}}} (a_{kt} + \sqrt{\frac{\omega_t}{\omega_i}} a_{ki}) \\ a'_{ikt} = \sqrt{\frac{\lambda_{iso}'}{\lambda_{iso}}} (c_i a_{kt} - c_t \sqrt{\frac{\omega_t}{\omega_i}} a_{ki}) \quad (14)$$

beschreiben die Stärke der Kopplung des Kaganvektors an die Wärmeströme.

(b) Ansatz für den Strom der Tensorpolarisation; Differentialgleichung für die Tensorpolarisation

Die Gln. (h) und (i) aus Tabelle 2 für die Tensorpolarisation und den Strom der Tensorpolarisation enthalten das Magnetfeld in der Präzessionsfrequenz ω_H und im Tensor vierter Stufe $\mathcal{H}_{\mu\nu,\mu'\nu'}$. Sie haben die Struktur

$$I_{\mu\nu} + \omega_H \mathcal{H}_{\mu\nu,\mu'\nu'} C_{\mu'\nu'} + \omega C_{\mu\nu} = 0,$$

wobei $C_{\mu\nu}$ für $a_{\mu\nu}$ bzw. $b_{\lambda,\mu\nu}$ steht und $I_{\mu\nu}$ die Inhomogenität der jeweiligen Gleichung bezeichnet. Die Auflösung einer derartigen Gleichung erfolgt am einfachsten mit Hilfe der von Hess^{6b)} eingeführten Projektionstensoren vierter Stufe $\mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)}$ (siehe auch²⁷⁾ und Anhang II). Unter Verwendung der Beziehung

$$\mathcal{H} : \mathcal{P}^{(m)} = i m \mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(m)} : \mathcal{H} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2)$$

folgt
$$C_{\mu\nu} \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} C_{\mu'\nu'} = - \frac{1}{1 + i m \varphi} \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} I_{\mu'\nu'} \frac{1}{\omega},$$

$\varphi = \omega_H / \omega$ ist der Winkel, um den der molekulare Rotationsdrehimpuls während der Stoßzeit ω^{-1} präzediert. Da die $\mathcal{P}^{(m)}$ Projektionseigenschaften haben

$$\mathcal{P}^{(m)} : \mathcal{P}^{(m')} = \delta_{mm'} \mathcal{P}^{(m)},$$

und vollständig sind
$$\sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\n'},$$

ist $C_{\mu\nu}$ durch seine m -Komponenten $C_{\mu\nu}^{(m)}$ vollständig und eindeutig bestimmt:

$$C_{\mu\nu} = \sum_{m=-2}^{+2} C_{\mu\nu}^{(m)}.$$

Nach diesem Verfahren erhält man aus (h) und (i)

$$\mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} a_{\mu'\nu'} = \frac{-1}{1 + i m \varphi_T} \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} \left[\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} a_{\mu'\nu'}^{(1)} + \frac{c_0}{\sqrt{3} \omega_L} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} b_{\lambda,\mu'\nu'} \right]$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} b_{\lambda,\mu'\nu'} = \frac{-1}{1 + i m \varphi_K} \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} \left[\Delta_{\mu'\nu',\lambda\lambda'}^{(2)} \left(\frac{\omega_{K\mp}}{\omega_K} a_{\lambda'}^{(3)} + \frac{\omega_{K\mp}}{\omega_K} a_{\lambda'}^{(4)} \right) + \frac{c_0}{\sqrt{3} \omega_K} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{\mu'\nu'} \right],$$

wobei zur Abkürzung

$$\omega_T = \omega_{+2}^{(22)} \quad (15)$$

gesetzt worden ist. Mit φ_T und φ_K werden die Verhältnisse

$$\varphi_T = \frac{\omega_H}{\omega_T}, \quad \varphi_K = \frac{\omega_H}{\omega_K} \quad (16)$$

bezeichnet; da die Präzessionsfrequenz ω_H proportional zur Stärke H des Magnetfelds ist, und da die Stoßfrequenzen ω_T , ω_K proportional zum Druck p_0 sind, hängen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ von H nur in der Form H/p_0 ab. Für niedrige Drücke kann es noch eine zusätzliche Druckabhängigkeit geben.

Nun hat man die zweite in die erste Gleichung einzusetzen, sowie in diese dann $\underline{a}^{(1)} \approx (\sqrt{2} p_0)^{-1} \underline{p}$ gemäß (1) einzuführen. Dabei kann man die Ankopplung von $\underline{a}$ an $\underline{p}$ vernachlässigen, entsprechend einer Vernachlässigung von $A_{\eta T} = \frac{(\omega_{\eta T})^2}{\omega_{\eta} \omega_T}$

gegenüber 1 in der Differentialgleichung für $\underline{a}$.

Das bedeutet, daß $p_0 \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}} \underline{a}$ in der Größenordnung $A_{\eta T} \underline{p}$ berechnet wird unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $A_{\eta T}$, das ist gerechtfertigt, denn $A_{\eta T}$ bestimmt die Größenordnung des SBE der Viskosität, ist also etwa 10^{-2} und kleiner ⁵⁾.

In gleicher Weise kann man in $\underline{b}$ für die "Wärmeströme" $\underline{a}^{(3)}$, $\underline{a}^{(4)}$ die "isotropen" Werte verwenden, dh. die Ankopplung von $\underline{B}$ außer Acht lassen. Als Ergebnis erhält man einen Ansatz für den Strom der Tensorpolarisation

$$\mathcal{P}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(m)} b_{\lambda, \mu'\nu'} = \frac{1}{1 + im\varphi_K} \mathcal{P}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(m)} \left[-\ell_K \frac{\partial a_{\mu'\nu'}}{\partial x_{\lambda}} + a_{\lambda'}^{(34)} \Delta_{\lambda'\lambda, \mu'\nu'}^{(2)} \right] \quad (17)$$

und Differentialgleichungen für die m -Komponenten der Tensorpolarisation ($m = 0, \pm 1, \pm 2$)

$$(1 - L_m^2 \nabla \cdot \nabla) \mathcal{P}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(m)} a_{\mu'\nu'} = \quad (18)$$

$$= \frac{1}{1 + im\varphi_T} \mathcal{P}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(m)} \left[\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \frac{\sqrt{2} \eta_{iso}}{p_0} (\nabla \cdot \nabla + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} \nabla \cdot \underline{q}^{\dagger T}) - \frac{\ell_T}{1 + im\varphi_K} \nabla \cdot \underline{a}^{(34)} \right]_{\mu'\nu'}$$

dabei ist

$$\underline{a}^{(34)} = \frac{3}{5} \frac{\sqrt{2}}{p_0} \lambda_{iso} \sqrt{\frac{\omega_t}{\omega_K} \frac{\lambda_{iso}^{\dagger}}{\lambda_{iso}}} (1 - A_{ti}) \cdot$$

$$\cdot \left[\nabla T a_{ikt} + \nabla T' a'_{ikt} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}^{\dagger}}{\lambda_{iso}}} + \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} \nabla \cdot \underline{p} a_{kt} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}^{\dagger}}{\lambda_{iso}}} \right], \quad (19)$$

und l_k, l_T, L_m sind freie Weglängen, definiert durch

$$l_k = \frac{c}{\sqrt{3} \omega_k}, \quad l_T = \frac{c}{\sqrt{3} \omega_T}, \quad L_m = \sqrt{\frac{l_k \cdot l_T}{(1 + i m \varphi_k)(1 + i m \varphi_T)}}. \quad (20)$$

Aus (17) läßt sich der Kaganvektor $\underline{B}$ berechnen zu

$$\underline{B} = \frac{5}{3} [\underline{\delta} - \underline{\Delta}(\varphi_k)] \cdot \underline{a}^{(34)} - l_k \underline{\nabla} \cdot [\underline{\Delta}^{(2)} - \widetilde{\mathcal{N}}(\varphi_k)] : \underline{a}, \quad (21)$$

mit dem Tensor zweiter Stufe

$$\underline{\Delta}(\varphi_k) = \frac{3}{5} \underline{P}^{\parallel} \frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} + \frac{3}{10} \underline{P}^{\perp} \left(\frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} + \frac{8\varphi_k^2}{1 + 4\varphi_k^2} \right) + \frac{3}{10} \underline{P}^{\text{tr}} \left(\frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1 + 4\varphi_k^2} \right), \quad (22)$$

und dem Tensor vierter Stufe

$$\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi_k) = \sum_{m=1}^2 \left[\frac{m^2 \varphi_k^2}{1 + m^2 \varphi_k^2} (\mathcal{P}^{(m)} + \mathcal{P}^{(-m)}) + \frac{m \varphi_k}{1 + m^2 \varphi_k^2} i (\mathcal{P}^{(m)} - \mathcal{P}^{(-m)}) \right]. \quad (23)$$

Die Tensoren $\underline{P}^{\parallel} = \underline{h} \underline{h}$ und $\underline{P}^{\perp} = \underline{\delta} - \underline{h} \underline{h}$ projizieren einen beliebigen Vektor $\underline{a}$ auf seine zu $\underline{h}$ parallele bzw. senkrechte Komponente; $H_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} h_{\lambda}$ hängt mit der infinitesimalen Drehung eines Vektors um $\underline{h}$ zusammen, $\underline{P}^{\text{tr}} = \underline{H}$ macht aus $\underline{a}$ den Vektor $\underline{h} \times \underline{a}$ (siehe Anhang II).

(c) Die hydrodynamische Näherung

Im hydrodynamischen Bereich ist die freie Weglänge im Gas klein gegen die Gefäßabmessungen, dann können alle höheren Ableitungen vernachlässigt werden. Somit folgt aus (21), (18)

$$\underline{B} = \lambda_{iso} \frac{\sqrt{2}}{p_0 c_0} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k} \frac{\lambda_{iso}^t}{\lambda_{iso}} (1 - A_{ti})}. \quad (24)$$

$$[\underline{\delta} - \underline{\Delta}(\varphi_k)] \cdot [\underline{\nabla} T a_{ikt} + \underline{\nabla} T' a'_{ikt} \sqrt{\frac{\lambda'_{iso}}{\lambda_{iso}}}]$$

$$\underline{a} = 2\eta_{iso} \frac{1}{\sqrt{2} p_0} \frac{\omega_{TT}}{\omega_T} [\underline{\Delta}^{(2)} - \widetilde{\mathcal{N}}(\varphi_T)] : \underline{\nabla} \underline{v}, \quad (25)$$

in diesem Fall hängt also der SBE der Viskosität und Wärmeleitfähigkeit von H und p_0 nur in der Form H/p_0 ab.

Mit (1) ergibt sich für den Drucktensor das bekannte Ergebnis 27)29)

$$\overline{p} = -2\eta \left[\Delta^{(1)} - A_{\eta T} \widetilde{\mathcal{L}}(\varphi_T) \right] : \overline{\nabla} \underline{v} \quad (26)$$

Die Viskosität ohne Magnetfeld

$$\eta = \eta_{iso} (1 + A_{\eta T}) \quad , \quad A_{\eta T} = \frac{(\omega_{\eta T})^2}{\omega_{\eta} \omega_T} \quad (27)$$

ist infolge der Ausrichtungseffekte um den Faktor $1 + A_{\eta T}$ größer als ihr isotroper Wert, außerdem gibt $A_{\eta T}$ auch die relative Stärke des Magnetfeldeinflusses an, sodaß η (mit Ausnahme der zu $\underline{h}$ parallelen Komponente) für sehr starkes Feld den Wert η_{iso} annimmt: partielle Zerstörung von $\underline{a}$ durch die schnelle Präzession.

Schreibt man nach Hess und Waldmann 27) den Reibungsdrucktensor allgemein in der Form

$$\overline{p} = -2 \sum_{m=-2}^{+2} \eta^{(m)} \mathcal{P}^{(m)} : \overline{\nabla} \underline{v} \quad , \quad (28)$$

und die fünf Viskositätskoeffizienten $\eta^{(m)}$ als

$$\eta^{(m)} = \eta (1 + \varepsilon_m + i \varepsilon_m^{tr}) \quad , \quad \varepsilon_{-m} = \varepsilon_m \quad , \quad \varepsilon_{-m}^{tr} = -\varepsilon_m^{tr} \quad , \quad (29)$$

so gilt in der Näherung, daß die Tensorpolarisation die einzige für den SBE der Viskosität maßgebende Anisotropiegröße ist:

$$\varepsilon_m = -A_{\eta T} \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} \quad , \quad \varepsilon_m^{tr} = -A_{\eta T} \frac{m \varphi_T}{1 + m^2 \varphi_T^2} \quad (30)$$

Nach der experimentellen Erfahrung 8-10) ist für alle untersuchten diamagnetischen Moleküle, mit Ausnahme von $NH_3^{44d)}$, $|\varepsilon_1|$ wesentlich kleiner als $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$, sodaß die Dominanz des Beitrags der Tensorpolarisation zum SBE der Viskosität gesichert ist. Anstelle von $\eta^{(m)}$ werden häufig die von de Groot und Mazur 31) eingeführten Viskositätskoeffizienten $\eta_1, \dots, \eta_5$ verwendet:

$$\eta^{(0)} = \eta_1 \quad , \quad \eta^{(1)} = \eta_3 + i \eta_5 \quad , \quad \eta^{(2)} = 2\eta_2 - \eta_1 - i \eta_4 \quad . \quad (31)$$

Wird der Kaganvektor $\underline{B}$ aus (24) in die Gln.(10),(11) eingesetzt, so ergeben sich tensorielle Beziehungen zwischen den Wärmeströmen und den Temperaturgradienten

$$\begin{aligned} \underline{q} &= - \underline{\lambda} \cdot \underline{\nabla} T - \underline{\lambda}'' \cdot \underline{\nabla} T' \\ q' &= - \underline{\lambda}'' \cdot \underline{\nabla} T - \underline{\lambda}' \cdot \underline{\nabla} T' \end{aligned} \quad (32)$$

Die Wärmeleitfähigkeitstensoren lassen sich in der Form

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= \lambda \left(\underline{\delta} - a_{ikt}^2 \underline{\Delta}(\varphi_k) \right), \quad \underline{\lambda}' = \lambda' \left(\underline{\delta} - a_{ikt}'^2 \underline{\Delta}(\varphi_k) \right), \\ \underline{\lambda}'' &= \lambda'' \underline{\delta} - \sqrt{\lambda_{iso} \lambda_{iso}'} a_{ikt} a_{ikt}' \underline{\Delta}(\varphi_k) \end{aligned} \quad (33)$$

schreiben, wobei die feldfreien Wärmeleitfähigkeiten

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{iso} (1 + a_{ikt}^2), \quad \lambda' = \lambda_{iso}' (1 + a_{ikt}'^2), \\ \lambda'' &= \lambda_{iso}'' + \sqrt{\lambda_{iso} \lambda_{iso}'} a_{ikt} a_{ikt}' \end{aligned} \quad (34)$$

infolge der Ausrichtungseffekte größer sind als im isotropen Fall. Ein Magnetfeld zerstört diese durch Stöße erzeugten Polarisierungen und vermindert so die Werte der Wärmeleitfähigkeiten.

In allen Fällen, in denen $T' = 0$ ist, spielt im Gesamtwärmestrom nur der Tensor $\underline{\lambda}$ eine Rolle, der mit (22) folgendermaßen zerlegt werden kann:

$$\underline{\lambda} = \lambda_{||} \underline{P}^{||} + \lambda_{\perp} \underline{P}^{\perp} + \lambda_{transv} \underline{P}^{tr} \quad (35)$$

Die Wärmeleitfähigkeiten in den durch $\underline{P}^{||}$, $\underline{P}^{\perp}$, $\underline{P}^{tr}$ bestimmten Richtungen sind (23)(30)

$$\begin{aligned} \lambda_{||} &= \lambda \left[1 - \frac{3}{5} a_{ikt}^2 \frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} \right], \\ \lambda_{\perp} &= \lambda \left[1 - \frac{3}{10} a_{ikt}^2 \left(\frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} + \frac{8\varphi_k^2}{1 + 4\varphi_k^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\lambda_{\text{transv}} = -\lambda \frac{3}{10} a_{\text{ikt}}^2 \left(\frac{\varphi_k}{1+\varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1+4\varphi_k^2} \right).$$

In der hier verwendeten Näherung, daß nur der Kaganvektor $\underline{B}$ den SBE der Wärmeleitfähigkeit bestimmt, gilt also die einfache Beziehung

$$\left(\frac{\lambda - \lambda_{\perp}}{\lambda - \lambda_{\parallel}} \right)_{\text{sat}} = \frac{3}{2} \quad (37)$$

zwischen den Sättigungswerten von $\lambda_{\perp}$ und $\lambda_{\parallel}$.

Eine Analyse der Experimente zeigt ¹¹⁾²⁴⁾, daß wirklich der Kaganvektor den dominanten Beitrag zum SBE der Wärmeleitfähigkeit der diamagnetischen Moleküle liefert.

S4. Die Ermittlung von Relaxationskonstanten aus dem Experiment

Die feldfreien Werte der Wärmeleitfähigkeit und Viskosität sind $\lambda = \lambda_{iso} (1 + a_{ikt}^2)$ und $\eta = \eta_{iso} (1 + A_{\eta\tau})$, wobei a_{ikt}^2 und $A_{\eta\tau}$ zugleich die Größenordnung des Feldeinflusses angeben. Da dieser von der Größenordnung 10^{-2} bis 10^{-3} ist, kann man die Anisotropien bei der Ermittlung von Zahlenwerten für die "klassischen" Relaxationskonstanten vernachlässigen, und $\lambda \approx \lambda_{iso}$, $\eta \approx \eta_{iso}$ setzen.

(a) Auswertung der feldfreien Transportkonstanten λ, η, η_v

Nach (3.3) kann man aus den gemessenen Scherviskositäten ω_η berechnen, bei gegebenen Werten von Druck p_0 und Temperatur T_0 :

$$\omega_\eta = \frac{p_0}{\eta} \quad (1)$$

Anstelle der druckabhängigen Relaxationskonstanten $\omega_{..}$ werden oft druckunabhängige Wirkungsquerschnitte $\sigma_{..}$ verwendet, die durch

$$\omega_{..} = n_0 \sqrt{\frac{16 k T_0}{\pi M}} \sigma_{..} \quad (2)$$

definiert sind. Aus ω_η bekommt man damit σ_η ; alle übrigen Relaxationskonstanten werden in der Form $\omega_{..} / \omega_\eta = \sigma_{..} / \sigma_\eta$ angegeben.

Daten für die Volumviskosität erhält man aus Messungen der Schallabsorption; nach (2.10,16) ergibt sich dann, bei Kenntnis von c_i , die Größe $\omega_{+0}^{(22)}$:

$$\omega_{+0}^{(22)} = \frac{2}{3} c_i^2 \frac{\eta}{\eta_v} \quad (3)$$

Unter Verwendung der exakten Beziehungen (1.19,20) kann man nun ω_t und ω_{ti} bestimmen (neue Bezeichnungen nach (3.2,6)):

$$\frac{\omega_t}{\omega_\eta} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_\eta} \quad (4)$$

$$- \frac{\omega_{ti}}{\omega_\eta} = \frac{5}{6} \frac{c_t}{c_i} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_\eta} \quad (5)$$

Dann ergeben sich aus den Daten der Wärmeleitfähigkeit und (3.8, 12)

$$\lambda \approx \lambda_{iso} = \frac{5}{2} \frac{k}{M} \frac{p_o}{1-A_{ti}} \left[\frac{1}{\omega_t} + \frac{2(-\omega_{ti})}{\omega_t \omega_i} + \frac{1}{\omega_i} \right]$$

Werte für ω_i

$$\frac{\omega_i}{\omega_\eta} = \frac{e' \omega_t / \omega_\eta + 2e'(-\omega_{ti} / \omega_\eta) + (\omega_{ti} / \omega_\eta)^2}{\omega_t / \omega_\eta - e'} \quad , \quad e' = \frac{5}{2} \frac{k}{M} \frac{\eta}{\lambda} \quad (6)$$

Dieses Verfahren wurde von Moraal und Mc Court ³²⁾ beschrieben und quantitativ durchgeführt für die Wasserstoffisotope. Hier soll es auf die Gase HD, CH₄, CO und N₂ angewendet werden, unter Benutzung der von Prangma ³³⁾ aus Schallabsorptionsmessungen extrahierten Werte für die Volumviskosität. Die so erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefaßt; dort ist außerdem noch die freie Weglänge l angegeben:

$$\eta \approx \eta_{iso} = \frac{5\pi}{32} n_o M l \sqrt{\frac{8kT_o}{\pi M}} \quad , \quad l = \frac{2}{5} \sqrt{2} \frac{1}{n_o \sigma_\eta} \quad (7)$$

(b) Auswertung des SBE der Viskosität und Wärmeleitfähigkeit

Aus den charakteristischen H/p_o -Werten, wie Lage des Maximums und Lage des halben Sättigungswerts, erhält man die Relaxationskonstanten ω_r und ω_k . Der Zusammenhang zwischen $\varphi_{..}$ und $\omega_{..}$ ist nach (3.16) $\varphi_{..} = \omega_H / \omega_{..} = \gamma(H/p_o) (\omega_\eta / \omega_{..}) \eta_{iso}$, bezw.

$$\frac{\omega_{..}}{\omega_\eta} = \frac{1}{\varphi_{..}} \left(\frac{H}{p_o} \right) \left| \left(\frac{H}{p_o} \right)^* \right| \quad \text{mit} \quad \left(\frac{H}{p_o} \right)^* = \frac{\hbar}{g \mu_N \eta} \quad (8)$$

Die Transversal-Effekte $\eta_4, \eta_5, \lambda_{transv}$ sind ungerade in $\varphi_{..}$, ihr Vorzeichen hängt also vom Vorzeichen des rotatorischen g-Faktors ab ⁹⁾³⁵⁾.

Ist der zu einem gemessenen H/p_o -Wert gehörige $\varphi_{..}$ -Wert bekannt, so ergibt sich $\omega_{..} / \omega_\eta$ aus (8). Aus einem "fit" ihrer Experimente mit den Formeln (3.30) finden Korving ⁸⁾ und Hulsman e.a. ⁹⁾¹⁰⁾ Werte für $(H/p_o)_{\varphi_T=1}$ und A_{η_T} ; aus dem Mittel dieser drei Experimente wird ω_T nach (8) und dann $|\omega_{\eta_T}|$ nach

$$\frac{|\omega_{\eta_T}|}{\omega_\eta} = \sqrt{A_{\eta_T} \frac{\omega_T}{\omega_\eta}} \quad (9)$$

berechnet. Daraus ergibt sich mit Hilfe der exakten Beziehung (1.21) auch $|\omega_{kt}|$

$$\omega_{kt} = \frac{1}{\sqrt{5}} \omega_{\eta\tau} \quad (10)$$

Die Auswertung der Wärmeleitfähigkeitsdaten erfolgt nach Messungen von $\Delta\lambda_{\perp} = \lambda_{\perp} - \lambda$ durch Hermans e.a. ¹¹⁾. Aus der Lage des halben Sättigungswerts bei

$$(\varphi_k)_{1/2}^{\perp} = 0.6248 \quad (11)$$

ergibt sich ω_k , und aus der Höhe des Sättigungswerts nach (3.36) folgt

$$|a_{ikt}| = \sqrt{\frac{10}{9} \left(-\frac{\Delta\lambda_{\perp}}{\lambda} \right)_{\text{sat}}} \quad (12)$$

Die beiden Relaxationskonstanten ω_{τ} und ω_k bestimmen nach Hess ^{6b)7)} auch die Stoß- bzw. Diffusionsverbreiterung der depolarisierten Rayleigh-Linie. In Experimenten von Cooper e.a., Keijser e.a. und Gupta und May ³⁶⁾ wurden aus der Stoßverbreiterung Daten für ω_{τ} gewonnen, die mit den aus dem SBE der Viskosität erhaltenen Werten ⁸⁻¹⁰⁾ recht gut übereinstimmen.

Aus dem SBE ergeben sich keinerlei Aussagen über die Vorzeichen von $\omega_{\eta\tau}$ und a_{ikt} ; diese erhält man nach Hess ⁶⁾ aus der Strömungs- ($\omega_{\eta\tau}$) bzw. Wärmestromdoppelbrechung (a_{ikt}) in Gasen. Experimente zur Strömungsdoppelbrechung von Baas ³⁷⁾ ergeben einen positiven Wert für $\omega_{\eta\tau}$ von CO_2 . Einige Argumente sprechen dafür, daß $\omega_{\eta\tau}$ allgemein positiv ist: Quantenmechanische Rechnungen für ein einfaches Potential ²³⁾ ergeben für HD einen positiven Wert, das Modell der rauen Kugeln liefert ³⁸⁾ stets $\omega_{\eta\tau} > 0$, ebenso wie eine für bestimmte Potentiale gültige Näherungsbeziehung ²⁶⁾.

Wenn die Vorzeichen s_{it} und s_t von a_{ikt} bzw. ω_{kt} (dh. $\omega_{\eta\tau}$) bekannt sind, ergibt sich ω_{ki} , einschließlich seines Vorzeichens s_i , nach (3.7,14) aus

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{ki}}{\omega_{\eta}} &= \frac{\omega_i}{\omega_{\eta}} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} \left(1 + \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_t} \right)^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[\sqrt{\frac{3}{5} \frac{\lambda_{iso}}{\lambda_t^{\text{iso}}} (1 - A_{ti})} a_{ikt} - \frac{\omega_{kt}}{\sqrt{\omega_k \omega_t}} \left(1 + \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_i} \right) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

Falls aber s_t und s_{it} nicht bekannt sind, gibt es zwei mögliche Werte für $|\omega_{ki}|$, je nachdem, ob $s_{it} = s_t$ oder $s_{it} = -s_t$ angenommen wird:

$$\frac{|\omega_{ki}|}{\omega_\eta} = \frac{\omega_i}{\omega_\eta} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} \left(1 + \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_t}\right)^{-1} . \quad (14)$$

$$\cdot \left| \sqrt{\frac{3}{5} \frac{\lambda_{iso}}{\lambda_{iso}^t} (1 - A_{ti})} |a_{ikt}| - s_{it} s_t \frac{|\omega_{kt}|}{\sqrt{\omega_k \omega_t}} \left(1 + \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_i}\right) \right| .$$

Wenn nun $s_{it} = -s_t$ ist, muß $s_i = s_{it} = -s_t$ sein; wenn dagegen $s_{it} = s_t$ ist, sind die beiden Fälle $s_i = s_{it} = s_t$ und $s_i = -s_{it} = -s_t$ möglich. Bei den hier betrachteten Gasen ist nun stets

$$\sqrt{\frac{3}{5} \frac{\lambda_{iso}}{\lambda_{iso}^t} (1 - A_{ti})} |a_{ikt}| > \frac{|\omega_{kt}|}{\sqrt{\omega_k \omega_t}} \left(1 + \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_i}\right) , \quad (15)$$

dann müssen aber ω_{ki} und a_{ikt} gleiches Vorzeichen haben

$$s_{it} = s_i . \quad (16)$$

Der Betrag von ω_{ki} ist also durch das relative Vorzeichen von ω_{ki} und ω_{ti} bestimmt; Levi, Mc Court und Beenakker ¹³⁾ konnten das Drehmoment beim Scott-Effekt annähernd mit ihrer Theorie beschreiben, falls sie $s_i = s_t$ annahmen. Auf diese Frage soll bei der Behandlung der thermomagnetischen Druckdifferenz noch einmal eingegangen werden (p. 114).

Die aus dem SBE der Viskosität und Wärmeleitfähigkeit erhaltenen Relaxationskonstanten sind in Tabelle 4 zusammengestellt.

Tabelle 3 : "Klassische" Relaxationskonstanten bei $T_0 = 293$ K, berechnet aus λ, η, η_v .

M	λ $\frac{\text{erg}}{\text{mol cm s K}}$	η $\frac{10^{-4} \text{ erg}}{\text{cm s}}$	η_v $\frac{10^{-4} \text{ erg}}{\text{cm s}}$	$\frac{c_t}{c_i}$	e^1	ω_{η}^{+1} $\frac{10^{10}}{\text{s}}$	$\tilde{G}_{\eta}$ $\text{\AA}^2$	$\frac{1}{10^{-2} \text{ mm}}$	$\omega_{\eta}^{(12)}$ $\frac{\omega_{\eta}^{+1}}{\omega_{\eta}}$	$\frac{\omega_t}{\omega_{\eta}}$	$\frac{-\omega_{ti}}{\omega_{\eta}}$	$\frac{\omega_i}{\omega_{\eta}}$	A_{ti}
HD	3.022 a) *) 1.529	b) *) 1.053	32) 2.56	1.5	0.47	0.962	18.96	9.05	0.044	0.70	0.055	1.58	0.0027
CH ₄	16.043 c) 0.341	c) 1.104	33) 1.44	1.0	0.42	0.918	41.66	4.12	0.13	0.77	0.11	1.08	0.014
CO	28.011 c) 0.249	c) 1.732	33) 0.93	1.5	0.52	0.585	35.09	4.89	0.20	0.83	0.25	1.96	0.038
N ₂	28.013 c) 0.256	c) 1.758	33) 1.28	1.5	0.51	0.576	34.57	4.96	0.15	0.79	0.18	1.90	0.022

*) siehe 34) ; die Daten wurden mit $\lambda, \eta \sim T^{1/2}$ auf $T_0 = 293$ K umgerechnet

+) $p_0 = 1$ atm **) berechnet nach (7) für $p_0 = 1$ torr

Tabelle 4 : Relaxationskonstanten für die Anisotropiegrößen bei $T_0 = 293 \text{ K}$, berechnet aus den SBE-Daten.

δ	$\left(\frac{H}{P_0}\right)^* \frac{\text{K Oe}}{\text{torr}}$	$^{+)} A_{\eta T} \cdot 10^3$	$^{+)} \left(\frac{H}{P_0}\right)_{q=1} \frac{\text{K Oe}}{\text{torr}}$	$\frac{\omega_T}{\omega_{\eta}}$	$\frac{ \omega_{\eta T} }{\omega_{\eta}} \cdot 10^2$	$\frac{ \omega_{kt} }{\omega_{\eta}} \cdot 10^2$	$^{**)} \left(\frac{-\Delta\lambda_z}{\lambda}\right)_{kt} \cdot 10^3$	$^{**)} \left(\frac{H}{P_0}\right)_{1/\pi} \frac{\text{K Oe}}{\text{torr}}$	$\frac{\omega_k}{\omega_{\eta}}$	$ a_{ikt} \cdot 10^2$	$\frac{ \omega_{ki} }{\omega_{\eta}} \cdot 10^2$	$s_1 = s_t$	$s_1 = -s_t$
a) *)													
HD	+0.663	+3.986	1.88	0.47	0.12	1.49	0.67	1.90	1.80	0.73	4.6	5.1	8.0
b)													
CH ₄	+0.313	+8.048	0.83	6.08	0.76	2.50	1.12	2.75	6.8	1.33	5.5	6.0	8.9
c)													
CO	-0.269	-5.977	3.64	5.28	0.88	5.67	2.54	12.3	5.15	1.33	11.7	19.0	29.2
d)													
N ₂	-0.278	-5.700	2.73	3.62	0.64	4.16	1.86	12.2	4.8	1.29	11.6	20.2	28.0

*) siehe 39)

+) Mittelwert aus 8), 9), 10)

**) nach 11)

§5. Der stationäre Fall: Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit und die Temperaturen

Für stationäre Probleme führt die Kontinuitätsgleichung (2.1) zur Divergenzfreiheit der Strömung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0, \quad (1)$$

und der Energiesatz (2.8) reduziert sich damit auf

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = 0. \quad (2)$$

Die Differenztemperatur T' läßt sich nun nach (2.11) ausdrücken als

$$T' = -\frac{2}{3} \frac{1}{\omega_{+0}^{(22)}} \frac{T_0}{p_0} \underline{\nabla} \cdot \underline{q}, \quad (3)$$

und vom Impulssatz (2.12) bleibt lediglich die Beziehung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{\nabla} p + c_i \frac{p_0}{T_0} \underline{\nabla} T' = 0. \quad (4)$$

Wenn nun der Ansatz (3.1) für den Reibungsdrucktensor $\underline{\bar{p}}$ in (4) eingesetzt wird, ergibt sich unter Beachtung der Gln.

(1), (2), (3) mit $\underline{\nabla} \cdot \underline{q}^{tr} = \underline{\nabla} \cdot \underline{q}'$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_{iso}} \underline{\nabla} p - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} &= \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{q}^{tr} - \frac{1}{\eta_{iso}} \frac{p_0}{T_0} \left(c_i + \frac{1}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_\eta} \right) \underline{\nabla} T' \\ &+ \frac{p_0}{\eta_{iso}} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_\eta} \underline{\nabla} \cdot \underline{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Daraus folgt mit $\underline{\nabla} \cdot \underline{q}^{tr} = \underline{\nabla} \cdot \underline{q}'$, (3) und (1)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} p = -\frac{p_0}{T_0} \left(c_i + \frac{4}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_\eta} \right) \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} T' + p_0 \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_\eta} \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \cdot \underline{a}). \quad (6)$$

Mit Hilfe des Ansatzes (3.10) für den Wärmestrom $\underline{q}$ wird die Bedingung (2) ausgewertet; nach Verwendung von (4) und (6), sowie nach Einführung der translatorischen Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_{iso}^{tr} = \lambda_{iso}^t + \lambda_{iso}^{ti}, \quad (7)$$

erhält man eine modifizierte Fourier-Gleichung für T :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla T = & -\nabla \cdot \nabla T' \left(\frac{\lambda_{iso}''}{\lambda_{iso}} + \frac{8}{25} \frac{\lambda_{iso}^{tr}}{\lambda_{iso}} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) + \frac{2}{5} T_0 \frac{\lambda_{iso}^{tr}}{\lambda_{iso}} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}} \nabla \cdot (\nabla \underline{a}) \\ & - \frac{p_0 c_0}{\sqrt{2}} \frac{(1 - A_{ti})}{\sqrt{\lambda_{iso} \cdot \lambda_{iso}^t}} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} a_{ikt} \nabla \cdot \underline{B} \end{aligned} \quad (8)$$

In ähnlicher Weise wird Gl. (3) für T' ausgewertet, unter Benutzung des Ansatzes (3.11) für $\underline{q}'$ und der Gln. (4), (6) und (8). Das Ergebnis ist eine Differentialgleichung für die Differenztemperatur:

$$\begin{aligned} T' - L_{T'}^2 \nabla \cdot \nabla T' = & \\ = \frac{-T_0 L_{T'}^2}{1 + \frac{8}{25} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}}} \left[\frac{2}{5} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}} \nabla \cdot (\nabla \underline{a}) - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\ell_k} \left(\frac{\omega_{kt}}{\omega_k} - \frac{\omega_{ki}}{\omega_k} \right) \nabla \cdot \underline{B} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Die freie Weglänge $L_{T'}$ ist gegeben durch

$$L_{T'}^2 = \frac{5}{3} \frac{k T_0}{M} \frac{1}{\omega_i \omega_{+0}^{(22)}} \frac{\lambda_{iso}^t}{\lambda_{iso}} \left(1 + \frac{8}{25} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) \quad (10)$$

Nun können noch die Größen $\nabla \cdot \nabla \underline{q}$ und $\nabla \cdot \nabla \underline{q}'$ aus den Ansätzen (3.10,11) berechnet werden, unter Verwendung von (8) und (9); nach Einsetzen von $\nabla \cdot \nabla \underline{q}^{tr} = \nabla \cdot \nabla (c_t \underline{q} + \underline{q}')$ in (5) folgt dann die modifizierte Navier-Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_{iso}} \nabla p - \nabla \cdot \nabla \underline{v} = & -\frac{1}{\eta_{iso}} \frac{p_0}{T_0} \left(c_t + \frac{4}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) \nabla T' + \frac{p_0}{\eta_{iso}} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}} \nabla \cdot \underline{a} \\ & + \frac{2}{5} \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} (1 - A_{ti})^{-1/2} a_{kt} (\nabla \nabla \cdot \underline{B} - \nabla \cdot \nabla \underline{B}) \end{aligned} \quad (11)$$

Im vorhergehenden Paragraphen sind der Reibungsdrucktensor, die Wärmeströme und der Strom der Tensorpolarisation in den Gln. (3.1,10,11,17) ausgedrückt worden durch die Geschwindigkeit, die Temperaturen und die Tensorpolarisation. Nun haben sich für diese Größen in (1,11,8,9) und (3.18) Differentialgleichungen ergeben, die nur gelöst werden können, wenn es auch Randbedingungen für $\underline{v}$, T , T' und $\underline{a}$ gibt.

II. RANDBEDINGUNGEN

§6. Der Entropiestrom im Gas

Ein allgemeines thermodynamisches Verfahren zur Ableitung von Randbedingungen im Übergangsbereich zwischen "Hydrodynamik" und "Knudsen-Gebiet" wurde von Waldmann ²¹⁾ im Jahre 1967 angegeben. Hier soll es speziell angewendet werden auf ein mehratomiges Gas, das an einen ruhenden Festkörper grenzt. Die geschlossene Grenzfläche $\mathcal{G}$ soll keinerlei Masse, Energie, Impuls oder Entropie besitzen, sie soll durchlässig sein für die Ströme dieser Größen, mit Ausnahme der Masse: die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten müssen also stetig sein auf $\mathcal{G}$, dh. bei ruhendem Festkörper gilt

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad . \quad (1)$$

Dabei bezeichnet im Folgenden $\underline{\mathbf{n}}$ stets die äußere Einheitsnormale des Gases.

Die Gesamtentropie des Systems ist nun einfach die Summe der Entropien von Gas und Festkörper, ohne einen Beitrag der Zwischenfläche :

$$S = \int_{\text{Gas}} s \, d\tau + \int (s s)_{\text{Solid}} \, d\tau \quad . \quad (2)$$

Da die lokale spezifische Entropie s einer Bilanzgleichung der Art

$$s \frac{ds}{dt} + \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{s}} = \Omega \quad (3)$$

genügt, wobei $\underline{\mathbf{s}}$ der Entropiestrom ist und Ω die lokale Entropieproduktion pro Volumen, ergibt sich für die totale Entropieproduktion

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{J} + \mathcal{J}_{\text{Solid}} + \Theta \quad . \quad (4)$$

Diese setzt sich also zusammen aus den Entropieproduktionen

$$\text{im Gas } \mathcal{J} = \int_{\text{Gas}} \Omega \, d\tau, \quad \mathcal{J}_{\text{Solid}} = \int_{\text{Festk.}} (\underline{q} \cdot \underline{\nabla} T^{-1})_{\text{Solid}} \, d\tau \quad \text{im Fest-}$$

körper und

$$\Theta = - \int_{\mathcal{G}} \underline{n} \cdot (\underline{s} - \underline{s}_{\text{Solid}}) \, d\sigma \quad (5)$$

an der Grenzfläche $\mathcal{G}$. Die Oberflächenentropieproduktion Θ beruht demnach auf einer Unstetigkeit der Entropieströme an der Zwischenfläche. In der Thermodynamik irreversibler Prozesse erhält man beispielsweise aus der Entropieproduktion $\mathcal{J}$ im Gas phänomenologische Ansätze für den Reibungsdrucktensor und den Wärmestrom ³¹⁾. Die Übertragung dieses Verfahrens auf die Oberfläche liefert nach Waldmann ²¹⁾ die phänomenologischen Randbedingungen. Dazu müssen die Entropieströme bekannt sein; im Festkörper gilt

$$\underline{s}_{\text{Solid}} = (T^{-1} \underline{q})_{\text{Solid}}; \quad (6)$$

der Entropiestrom $\underline{s}$ im Gas wird aus der Verteilungsfunktion berechnet. Der auf Boltzmann zurückgehende Ansatz für die spezifische Entropie ($h = 2 \pi \hbar$, $e = 2.718281\dots$)

$$s = - \frac{k}{M} \left\langle \log \frac{1}{e} \left(\frac{h}{M} \right)^3 f \right\rangle$$

führt zum Entropiestrom

$$\underline{s} = - n k \left\langle (\underline{c} - \underline{v}) \log \frac{1}{e} \left(\frac{h}{M} \right)^3 f \right\rangle. \quad (7)$$

Der Faktor $\frac{1}{e} \left(\frac{h}{M} \right)^3$ wurde so gewählt, daß sich im Gleichgewicht der aus der statistischen Mechanik bekannte Wert für die Entropie eines idealen Gases aus rotierenden Molekülen ergibt:

$$s_0 = \frac{k}{M} \left[\log \frac{Q}{n_0} \left(\frac{M k T_0}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} + \frac{\langle E(J^2) \rangle_0}{k T_0} \right].$$

Wird nun die Entwicklung (1.4) von $f = f_0 (1 + \phi)$ benutzt, so folgt, bei Berücksichtigung von Termen, die quadra-

tisch in Abweichungen vom Gleichgewicht sind:

$$\underline{s} = \frac{1}{T_0} (\underline{q} + \underline{p} \cdot \underline{v} - p_0 \underline{v}) - \frac{1}{2} n_0 k \langle \underline{c} \phi^2 \rangle_0 .$$

Nun wird die Entwicklung von ϕ nach (1.8) und Tabelle 1 verwendet, damit ergibt sich schließlich das Resultat:

$$\underline{s} = \frac{1}{T} \underline{q} - \frac{1}{T_0^2} T' \underline{q}' - \frac{2}{5} \frac{1}{T_0 p_0} \overline{\underline{p}} \cdot \underline{q}^{tr} - n_0 k \frac{c_0}{\sqrt{3}} \underline{b} : \underline{a} . \quad (8)$$

Der Entropiestrom im Gas enthält neben dem vertrauten Term

$\frac{1}{T} \underline{q}$ auch einen Beitrag von der Differenztemperatur T' und vom Differenzwärmestrom $\underline{q}'$; in der verwendeten Näherung ist

$$\frac{1}{T} \underline{q} - \frac{1}{T_0^2} T' \underline{q}' = \frac{1}{T_{tr}} \underline{q}^{tr} + \frac{1}{T_{rot}} \underline{q}^{rot} .$$

Der "Burnett-Term" $-\frac{2}{5} \frac{1}{T_0 p_0} \overline{\underline{p}} \cdot \underline{q}^{tr}$ tritt auf wegen der

Kopplung zwischen $\overline{\underline{p}}$ und $\underline{q}^{tr}$ in den Ansätzen (3.1,4).

Der letzte Term in (8) $- n_0 k \frac{c_0}{\sqrt{3}} \underline{b} : \underline{a}$ ist der Beitrag

der Ausrichtungseffekte zum Entropiestrom, er wird letztlich zu Randbedingungen für die Tensorpolarisation führen.

§7. Die Berechnung der Oberflächenentropieproduktion

Werden die Ausdrücke (6.6,8) für die Entropieströme $\underline{s}_{\text{solid}}$ und $\underline{s}$ in die Formel (6.5) eingesetzt, so ergibt sich die Oberflächenentropieproduktion zu

$$\begin{aligned} \textcircled{1} = \int_{\sigma} d\sigma \left[- \left(\frac{1}{T} q_{\perp} - \frac{1}{T_{\text{solid}}} q_{\perp \text{solid}} \right) \cdot \underline{n} + \frac{1}{T_0} T' q_{\perp}' \cdot \underline{n} \right. \\ \left. + \frac{2}{5} \frac{1}{T_0 p_0} \underline{n} \cdot \underline{p} \cdot q_{\perp}^{\text{tr}} + n k \frac{c_0}{\sqrt{3}} (\underline{n} \cdot \underline{b}) : \underline{a} \right] . \end{aligned} \quad (1)$$

Der Integrand soll nun umgeformt werden in eine Summe aus bilinearen Produkten unabhängiger "Kräfte" und "Ströme"; die nach dem Schema der Thermodynamik irreversibler Prozesse aufgestellten linearen Beziehungen zwischen "Kräften" und "Strömen" liefern dann die Randbedingungen.

Die Normalkomponenten der Wärmeströme $q \cdot \underline{n}$ und $q_{\text{solid}} \cdot \underline{n}$ sind nicht unabhängig voneinander, vielmehr besteht eine Beziehung zwischen ihnen, die aus der Erhaltung der Gesamtenergie E des Systems folgt:

$$\begin{aligned} E = \int_{\text{Gas}} \varrho e_g d\tau + \int_{\text{Festk.}} \varrho_s e_s d\tau \quad \text{bleibt erhalten, dh.} \\ \frac{dE}{dt} = \int_{\text{Gas}} \varrho \frac{de_g}{dt} d\tau + \int_{\text{Festk.}} \varrho_s \frac{de_s}{dt} d\tau = 0 . \end{aligned}$$

Für die spezifische Energie im Gas e_g gilt die folgende lokale Bilanzgleichung, die sich ohne Verwendung von Näherungen (wie Linearisierung und Entwicklung von f) aus der Waldmann-Snider-Gleichung ergibt ¹⁾:

$$\varrho \frac{de_g}{dt} = - \underline{\nabla} \cdot (\underline{p} \cdot \underline{v} + q_{\perp}) ;$$

$$\text{im Festkörper ist einfach} \quad \varrho_s \frac{de_s}{dt} = - \underline{\nabla} \cdot q_{\perp \text{solid}} .$$

Damit ergibt sich eine integrale Bedingungsgleichung für die Energien an der Grenzfläche

$$\int_{\sigma} \left[(q_{\perp} - q_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} + \underline{k} \cdot \underline{v} \right] d\sigma = 0 ,$$

dabei ist $\underline{k} = \underline{n} \cdot \underline{p}$ die Kraft, die das Gas auf die Flächeneinheit des Festkörpers ausübt. Durch Einführen eines "Oberflächenwärmestroms" $\underline{Q}$, mit $\underline{Q} \cdot \underline{n} = 0$, wird aus der integralen Bedingung eine lokale gemacht (21)

$$(\underline{q} - q_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} + \underline{k}^{\text{tan}} \cdot \underline{v}^{\text{tan}} = \underline{v}^{\text{tan}} \cdot \underline{Q} \quad ; \quad (2)$$

da $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ ist, wurde $\underline{k} \cdot \underline{v}$ durch das Produkt der Tangentialkomponenten ersetzt.

Die Wärme, die lokal in der Grenzfläche stecken bleibt, infolge einer Unstetigkeit der normalen Wärmeströme und der Entwicklung von Reibungswärme, wird durch den Oberflächenwärmestrom abgeführt. Insgesamt sammelt sich aber keine Wärme in der Oberfläche an, da

$$\int_{\mathcal{G}} d\mathcal{G} \underline{v}^{\text{tan}} \cdot \underline{Q} = \int_{\mathcal{G}} d\xi^1 d\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{G} \underline{X}^i \cdot \underline{Q}) = 0$$

ist bei einer geschlossenen Oberfläche $\mathcal{G}$; ξ^i ($i = 1, 2$) sind die Oberflächenparameter, $\underline{X}^i$ die Tangentialvektoren und $d\mathcal{G} = \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2$ ist das Oberflächenelement.

Mit Hilfe der Identität

$$\underline{n} \cdot \left(\frac{1}{T} \underline{q} - \frac{1}{T_{\text{solid}}} q_{\text{solid}} \right) \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} \underline{n} \cdot (\underline{q} + q_{\text{solid}}) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{solid}}} \right)$$

$$+ \underline{n} \cdot (\underline{q} - q_{\text{solid}}) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_{\text{solid}}} \right) \quad \text{und der Beziehung (2) wird}$$

der erste Term in der Oberflächenentropieproduktion (1) umgeformt; dabei werden nur Ausdrücke berücksichtigt, die höchstens quadratisch in Abweichungen vom Gleichgewicht sind:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{T} \underline{q} - \frac{1}{T_{\text{solid}}} q_{\text{solid}} \right) \cdot \underline{n} \approx \frac{1}{2} \underline{n} \cdot (\underline{q} + q_{\text{solid}}) \frac{1}{T_0^2} (T - T_{\text{solid}}) \\ & + \frac{1}{T_0} \underline{k}^{\text{tan}} \cdot \underline{v}^{\text{tan}} - \frac{1}{T_0} \underline{Q} \cdot \underline{v}^{\text{tan}} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}}) - \underline{v}^{\text{tan}} \cdot \left[q_2^1 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_{\text{solid}}} \right) \right], \end{aligned}$$

das letzte Glied verschwindet bei der Integration über die geschlossene Oberfläche $\mathcal{G}$. Der dritte Term in (1) wird zunächst in Tangential- und Normalanteile zerlegt:

$$\underline{n} \cdot \underline{p} \cdot \underline{q}^{\text{tr}} = (\underline{n} \cdot \underline{p} \cdot \underline{n}) (\underline{n} \cdot \underline{q}^{\text{tr}}) + (\underline{n} \cdot \underline{p})^{\text{tan}} \cdot (\underline{q}^{\text{tr}})^{\text{tan}}, \quad \text{da aber}$$

$(\underline{n} \cdot \underline{\hat{p}})^{\text{tan}} = (\underline{n} \cdot \underline{p})^{\text{tan}} = \underline{k}^{\text{tan}}$ ist, kann der Tangentialanteil mit $\underline{k}^{\text{tan}} \cdot \underline{v}^{\text{tan}}$ zusammengefaßt werden zu $\underline{k}^{\text{tan}} \cdot (\underline{v} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} \underline{q}^{\text{tr}})^{\text{tan}}$.

Im Normalanteil sollen die Kräfte $\underline{q}' \cdot \underline{n}$ und $(\underline{q} + \underline{q}_{\text{solid}}) \cdot \underline{n}$ eingeführt werden:

$$\underline{q}^{\text{tr}} \cdot \underline{n} = c_t \underline{q} \cdot \underline{n} + \underline{q}' \cdot \underline{n} = c_t \frac{1}{2} (\underline{q} - \underline{q}_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} + c_t \frac{1}{2} (\underline{q} + \underline{q}_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} \\ + \underline{q}' \cdot \underline{n} \approx \frac{1}{2} c_t \underline{v}^{\text{tan}} \cdot \underline{q} + c_t \frac{1}{2} (\underline{q} + \underline{q}_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} + \underline{q}' \cdot \underline{n},$$

beim Einsetzen von (2) wurde das Glied $\underline{k}^{\text{tan}} \cdot \underline{v}^{\text{tan}}$ vernachlässigt, da es in der Entropieproduktion zu einem Glied dritter Ordnung führen würde. Als Zwischenergebnis wird notiert:

$$\begin{aligned} \Theta = \int_{\sigma} d\sigma T_o^{-1} & \left[\frac{1}{2} \underline{n} \cdot (\underline{q} + \underline{q}_{\text{solid}}) (T - T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_o}{p_0} k'_n) T_o^{-1} \right. \\ & + \underline{q}' \cdot \underline{n} (T + \frac{2}{5} \frac{T_o}{p_0} k'_n) T_o^{-1} + \underline{k}^{\text{tan}} \cdot (\underline{v} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} \underline{q}^{\text{tr}})^{\text{tan}} \\ & \left. - \frac{1}{T_o} \underline{Q} \cdot \underline{v}^{\text{tan}} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_o}{p_0} k'_n) + \frac{p_0 c_0}{\sqrt{3}} (\underline{n} \cdot \underline{b}) : \underline{a} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

dabei wurden die Abkürzungen

$$\underline{k} = \underline{n} \cdot \underline{\hat{p}} \quad , \quad k'_n = \underline{n} \cdot \underline{\hat{p}} \cdot \underline{n} \quad (4)$$

verwendet.

Der letzte Term in (3) $(\underline{n} \cdot \underline{b}) : \underline{a}$ wird nun zerlegt in Produkte aus Oberflächenskalaren, -vektoren und -tensoren. Dazu wird der symmetrisch irreduzible Tensor zweiter Stufe $\underline{a}$ folgendermaßen aufgespalten

$$\underline{a} = \frac{3}{2} a \underline{n} \underline{n} + 2 \underline{\underline{a}} \underline{n} + \underline{\underline{\underline{a}}} \quad ; \quad (5)$$

er enthält also einen symmetrisch irreduziblen Oberflächentensor zweiter Stufe $\underline{\underline{\underline{a}}}$ (2 unabhängige Komponenten)

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{\underline{a}}} = \underline{\underline{\underline{a}}} = \underline{\underline{\underline{a}}} \cdot \underline{n} \quad , \quad (6)$$

einen Tangentialvektor $\underline{a}$ (2 Komponenten)

$$\underline{a} = (\underline{n} \cdot \underline{a})^{\tan}, \quad \underline{a} \cdot \underline{n} = 0, \quad (7)$$

und einen Oberflächenskalare a (1 Komponente)

$$a = \underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \underline{n}. \quad (8)$$

Man kann (5) und (6) auch als Definitionsgleichungen von $\underline{\underline{M}}$ auffassen.

In gleicher Weise wie $\underline{a}$ wird der symmetrisch irreduzible Tensor zweiter Stufe $\underline{\underline{n \cdot b}}$ zerlegt:

$$\underline{\underline{n \cdot b}} = \frac{3}{2} b \underline{\underline{n \cdot n}} + 2 \underline{\underline{b \cdot n}} + \underline{\underline{\mathcal{L}}} \quad (9)$$

$$b = (\underline{\underline{n \cdot b}}) : (\underline{\underline{n \cdot n}}), \quad \underline{\underline{b}} = (\underline{\underline{n \cdot b \cdot n}})^{\tan}, \quad \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}} = \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}} \cdot \underline{\underline{n}}.$$

Dann gilt für das Produkt

$$(\underline{\underline{n \cdot b}}) : \underline{\underline{a}} = \frac{3}{2} b a + 2 \underline{\underline{b \cdot a}} + \underline{\underline{\mathcal{L}}} : \underline{\underline{M}} \quad (10)$$

Damit folgt aus (3) der endgültige Ausdruck für die Oberflächenentropieproduktion

$$\Theta = \int_{\underline{\underline{G}}} d\sigma T_o^{-1} \left[I_S + I_V + I_T \right] \quad (11)$$

Der Integrand I_S enthält die Produkte der Oberflächenskalare

$$I_S = T_o^{-1} \left(T - T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_o}{p_o} k_n' \right) \frac{1}{2} (q_{\underline{\underline{t}}} + q_{\underline{\underline{t}}_{\text{solid}}}) \cdot \underline{\underline{n}} \\ + T_o^{-1} \left(T' + \frac{2}{5} \frac{T_o}{p_o} k_n' \right) q_{\underline{\underline{t}}} \cdot \underline{\underline{n}} + \frac{p_o c_o}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} a b, \quad (12)$$

in I_V sind die Tangentialvektoren enthalten

$$I_V = \left(\underline{\underline{v}} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_o} q_{\underline{\underline{t}}}^{\text{tr}} \right)^{\tan} \cdot \underline{\underline{k}}^{\tan} \\ - \frac{1}{T_o} \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}^{\tan} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_o}{p_o} k_n') + \frac{p_o c_o}{\sqrt{3}} 2 a \cdot b, \quad (13)$$

und I_T besteht aus den Oberflächentensoren zweiter Stufe

$$I_T = p_o c_o (\sqrt{3})^{-1} \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}. \quad (14)$$

§8. Die Randbedingungen

Die Oberflächenentropieproduktion hat jetzt die für die Aufstellung der Randbedingungen gewünschte Form: sie besteht aus einer Summe von bilinearen Produkten unabhängiger "Kräfte" und "Ströme". Wenn die "Ströme" nun als lineare Funktionen der "Kräfte" angesetzt werden, kann die Oberflächenentropieproduktion als quadratische Form in den "Kräften" geschrieben werden. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verlangt eine positive Entropieproduktion, also muß auch $\langle H \rangle > 0$ sein, die quadratische Form muß demnach positiv-semidefinit sein. Die in den Randbedingungen auftretenden phänomenologischen Koeffizienten könnten Tensorcharakter haben, wobei diese Tensoren aufgebaut sein könnten aus der Richtung $\underline{h}$ des Magnetfelds ¹⁹⁾, aus der Einheitsnormalen $\underline{n}$ und aus Krümmungstensoren der Fläche $\mathcal{G}$, das soll hier nicht berücksichtigt werden, die Koeffizienten sollen Skalare sein. Dann gibt es also keine Kopplung zwischen skalaren, vektoriellen und tensoriellen Strömen ²¹⁾.

In dieser Näherung erhält man aus I_S in (7.12) drei skalare Bedingungen (1) - (3) für T, T' und $\underline{a}$, aus I_V ergeben sich nach (7.13) drei Randbedingungen (4) - (6) für die Tangentialvektoren $\underline{v}^{\text{tan}}, \underline{Q}$ und $\underline{a}$ und aus I_T folgt mit (7.14) eine Gleichung für den Oberflächentensor $\underline{Q}_T$ (7). Das ist ein Satz linearer Randbedingungen, die aus der Oberflächenentropieproduktion abgeleitet wurden; dazu kommen noch in (8) und (9) die Stetigkeit der normalen Geschwindigkeit (6.1) und der linearisierte "Oberflächenenergiesatz" (7.2).

Die Oberflächenentropieproduktion $\langle H \rangle$ ist sicher dann positiv, wenn die Integranden $I_{..}$ positiv sind, also müssen die Determinanten der phänomenologischen Koeffizienten positiv sein:

$$I_S > 0: \quad L_{ii} > 0, \quad L_{ii} L_{kk} - L_{ik} L_{ki} > 0$$

$$I_V > 0: \quad \mathcal{L}_{ii} > 0, \quad \mathcal{L}_{ii} \mathcal{L}_{kk} - \mathcal{L}_{ik} \mathcal{L}_{ki} > 0$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

$$I_T > 0: \quad C_a > 0 \quad .$$

$$T - T_{solid} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_0}{p_0} k_n' = L_{n1} \frac{1}{2} (q_t + q_{solid}) \cdot \bar{n} + L_{n2} q_t' \cdot \bar{n} + L_{n3} \frac{3}{2} \frac{p_0 c_0}{\sqrt{3}} b \quad (1)$$

$$T' + \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} k_n' = L_{21} \frac{1}{2} (q_t + q_{solid}) \cdot \bar{m} + L_{22} q_t' \cdot \bar{m} + L_{23} \frac{3}{2} \frac{p_0 c_0}{\sqrt{3}} b \quad (2)$$

$$\bar{T}_0 a = L_{31} \frac{1}{2} (q_t + q_{solid}) \cdot \bar{n} + L_{32} q_t' \cdot \bar{n} + L_{33} \frac{3}{2} \frac{p_0 c_0}{\sqrt{3}} b \quad (3)$$

$$\left(\bar{v} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} q_t^{tr} \right)^{tan} = \mathcal{L}_{11} \bar{k}^{tan} + \mathcal{L}_{12} \bar{\nabla}^{tan} \cdot \frac{1}{2} (T + T_{solid} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_0}{p_0} k_n') + \mathcal{L}_{13} \frac{2}{p_0} \bar{b} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{T_0} \underline{Q} = \mathcal{L}_{21} \bar{k}^{tan} + \mathcal{L}_{22} \bar{\nabla}^{tan} \cdot \frac{1}{2} (T + T_{solid} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_0}{p_0} k_n') + \mathcal{L}_{23} \frac{2}{p_0} \bar{b} \quad (5)$$

$$\frac{c_0}{\sqrt{3}} \underline{Q} = \mathcal{L}_{31} \bar{k}^{tan} + \mathcal{L}_{32} \bar{\nabla}^{tan} \cdot \frac{1}{2} (T + T_{solid} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_0}{p_0} k_n') + \mathcal{L}_{33} \frac{2}{p_0} \bar{b} \quad (6)$$

$$\underline{u} = c_a \underline{\mathcal{L}} \quad (7); \quad \underline{v} \cdot \bar{n} = 0 \quad (8), \quad (q_t - q_{solid}) \cdot \bar{n} = \bar{\nabla}^{tan} \cdot \underline{Q} \quad (9)$$

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (10), \quad \mathcal{L}_{21} = \mathcal{L}_{n2}, \quad \mathcal{L}_{31} = -\mathcal{L}_{n3}, \quad \mathcal{L}_{32} = -\mathcal{L}_{23} \quad (11)$$

$$L_{ii} \geq 0, \quad L_{ii} L_{kk} - L_{ik}^2 \gg 0, \quad \mathcal{L}_{ii} \gg 0, \quad \mathcal{L}_{n1} \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{n2}^2 \gg 0, \quad c_a \gg 0 \quad (12)$$

Für die nichtdiagonalen Koeffizienten gibt es ferner Onsager-sche Symmetriebeziehungen ²¹⁾: die Matrix (L_{ik}) ist symmetrisch (10), da alle skalaren "Kräfte" gleiches (negatives) Zeitumkehrverhalten haben; dagegen hat die Matrix $(\mathcal{L}_{ik})$ gemischte Symmetrie (11), denn $\underline{b}$ hat ein anderes Zeitumkehrverhalten wie $\underline{k}^{\text{tan}}$ und $\underline{v}^{\text{tan}}$ T. Nach Verwendung der Symmetriebeziehungen (10), (11) bleiben von der Definitheit $(H) \geq 0$ die in (12) zusammengefaßten Bedingungen übrig. Diese enthalten u.a. folgende Aussage: Wenn beispielsweise die Erzeugung einer skalaren Tensorpolarisation (3) am Rand durch normale Wärmeströme berücksichtigt werden soll, also etwa $L_{31} \neq 0$ angenommen wird, dann muß, wegen der Onsager-Symmetrie $L_{13} = L_{31} \neq 0$, auch ein Temperatursprung (1) infolge von Normalkomponenten des Tensorpolarisationsstroms zugelassen werden. Außerdem muß aber $L_{11} L_{33} - L_{13}^2 \geq 0$ sein, dh. der gewöhnliche Temperatursprung ($\sim L_{11}$) und die Akkomodation der Tensorpolarisation ($\sim L_{33}$) dürfen dann nicht vernachlässigt werden: $L_{11} > 0, L_{33} > 0$.

Durch Gl.(2) wird der Wert der Differenztemperatur T' am Rand festgelegt; bei Vernachlässigung der Anisotropieeffekte folgt dann aus der Differentialgleichung (5.9), daß T' von diesem Randwert her ins Gas hinein (auf einer Strecke $\approx L_T$) auf den Wert $T' = 0$ abklingt. Siehe auch das Beispiel in Anhang V. Eine Inspektion der Randbedingungen (1) - (6) zeigt, daß in ihnen T_{tr} (enthalten in $T = c_t T_{\text{tr}} + c_i T_{\text{rot}}$ und $T' = T_{\text{tr}} - T_{\text{rot}}$) stets in der Kombination $T_{\text{tr}} + 2/5 (T_o/p_o) k'_n$ auftritt, und daß $\underline{v}^{\text{tan}}$ als $(\underline{v} + 2/5 (1/p_o) \underline{q}^{\text{tr}})^{\text{tan}}$ vorkommt. Das geht zurück auf den Beitrag $-2/5 (1/p_o) \underline{p} \cdot \underline{q}^{\text{tr}}$ zum Entropiestrom im Gas (6.8) und ist vergleichbar mit der Tatsache, daß im Gas der Ansatz (3.1) für den Reibungsdruktensor $\underline{p}$ ebenfalls die Kombination $\underline{v} + 2/5 (1/p_o) \underline{q}^{\text{tr}}$ enthält, und daß in den Ansätzen (3.4,5) für die Wärmeströme stets $\underline{v} T_{\text{tr}} + 2/5 (T_o/p_o) \underline{v} \cdot \underline{p}$ auftritt. Hieran erkennt man deutlich die engen Beziehungen zwischen der Art der im Gas verwendeten Ansätze und den nach der Waldmannschen Methode abgeleiteten Randbedingungen: Wenn also beispielsweise eine thermische Gleitung am Rand berücksichtigt werden soll, dann sollte im Ansatz für $\underline{p}$ auch der Burnett-Term $2/5 (1/p_o) \underline{v} \underline{q}^{\text{tr}}$

mitgenommen werden. Aufgrund der Symmetrie (11) $\mathcal{L}_{21} = \mathcal{L}_{12}$ und der Bedingung (12) $\mathcal{L}_{11} \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2 > 0$ ist der Oberflächenwärmestrom $\underline{Q}$ eng mit der thermischen Gleitung verknüpft, beide Erscheinungen sollten daher stets zusammen behandelt werden ²¹⁾. Der Term $\mathcal{L}_{13} \frac{2}{3} p_0 \underline{b}$ beschreibt den Einfluß eines Magnetfelds auf den Oberflächenwärmestrom. Mit Hilfe des Ansatzes (5) für $\underline{Q}$ erhält man aus (9) eine Beziehung zwischen den Normalkomponenten der Wärmeströme $\underline{q}$ und $\underline{q}_{\text{solid}}$ an der Grenzfläche.

Nach (4) gibt es neben der durch $\underline{k}^{\text{tan}}$ bestimmten "mechanischen" Gleitung und der "thermischen" Gleitung, die aus den Beiträgen $-2/5 (1/p_0) (\underline{q}^{\text{tr}})^{\text{tan}}$ und $\mathcal{L}_{12} \nabla^{\text{tan}} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} C_t k_n^1)$ besteht, auch eine "thermomagnetische" Gleitung aufgrund tangentialer Komponenten des Tensorpolarisationsstroms $(\underline{n} \cdot \underline{b} \cdot \underline{n})^{\text{tan}}$. Andererseits gibt es nach (6) auch tangentialer Komponenten der Tensorpolarisation am Rand ($\underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{n})^{\text{tan}}$), wenn tangentialer Kräfte vorhanden sind. Beide Phänomene hängen über die Onsager-Beziehung $\mathcal{L}_{31} = -\mathcal{L}_{13}$ zusammen. Die Kopplung zwischen der Gleitgeschwindigkeit und den Anisotropiegrößen am Rand ist besonders wichtig für die Erklärung der Knudsen-Korrekturen am SBE der Viskosität, für die Theorie der thermomagnetischen Druckdifferenz ¹⁴⁾²²⁾ und für die Gleitungsbeiträge zum Drehmoment des Scott-Effekts ¹⁴⁾. Ebenso wichtig sind dabei jedoch die Gln.(3), (6) und (7), die den Wert der Tensorpolarisation am Rand bestimmen.

L. Waldmann ¹⁴⁾ hat als erster die thermomagnetische Gleitung postuliert und damit ein Drehmoment für den Scott-Effekt berechnet, sowie auf die Existenz einer thermomagnetischen Druckdifferenz hingewiesen. Eine Randbedingung für die Tensorpolarisation $\underline{a}$ wurde nicht betrachtet, und auch nicht benötigt, da in den beiden ersten einfachen Anwendungen keine Differentialgleichung für $\underline{a}$ gelöst wurde.

J. Halbritter ²⁰⁾ hat aus einer Randbedingung für die Verteilungsfunktion die thermomagnetische Gleitung berechnet zu

$c_0 c_s (b_{\mu_1 \nu \lambda} n_\nu n_\lambda)^{\text{tan}}$ (in (4) steht $\mathcal{L}_{13} \frac{2}{3} p_0 (n_\lambda b_{\lambda \mu \nu} n_\nu)^{\text{tan}}$), und den Koeffizienten C_s auf den "nichtsphärischen" Anteil

der Wechselwirkung zwischen Gasmolekül und Wand zurückgeführt. Außerdem wurde eine Bedingung für die Tensorpolarisation angegeben:

$$\underline{a} = C_a \underline{n} \cdot \underline{b}, \quad \text{sie ist als Spezialfall in (3), (6)}$$

und (7) enthalten (siehe §9). Da das Hauptanliegen ein Ergebnis für C_a war (ausgedrückt durch Akkomodationskoeffizienten), wurden alle dafür unwesentlichen Kopplungen vernachlässigt, sodaß also keine Symmetrieaussagen der Art $\mathcal{L}_{31} = -\mathcal{L}_{13}$ gemacht werden können. Als Größenordnung für den nichtdiagonalen Kopplungskoeffizienten C_s wurde $C_s \sim 10^{-3}$ gefunden, für den diagonalen Koeffizienten C_a dagegen $C_a \sim 1$ (vergleiche dazu die Ergebnisse von Teil B).

In den Paragraphen 3, 5 und 8 wurde ein System von Ansätzen, Differentialgleichungen und Randbedingungen aufgestellt zur Beschreibung von stationären Strömungs- und Wärmeleitungsvorgängen in verdünnten mehratomigen Gasen im Magnetfeld. Die vollständige Lösung eines konkreten Problems ist i.a. sehr verwickelt; das Lösungsverfahren kann jedoch wesentlich vereinfacht werden wegen der relativen Kleinheit der Feldeffekte, die sich aus dem SBE zu 10^{-2} bis 10^{-3} ergibt ⁵⁾.

§9. Vereinfachte Randbedingungen, Differentialgleichungen und Ansätze für spezielle Probleme.

Zunächst wird das in §8 aufgestellte allgemeine System von Randbedingungen zur Anwendung auf die in den Teilen B und C behandelten Probleme etwas vereinfacht, dazu werden dann in derselben Näherung die Differentialgleichungen und Ansätze angegeben.

Die Tensorpolarisation am Rand ergibt sich mit (8.3,6,7) aus den "Oberflächen"-Komponenten $\underline{n} \cdot \underline{a} \cdot \underline{n} = a$, $(\underline{a} \cdot \underline{n})^{\tan} = \underline{a}$ und $\underline{a}$ gemäß (7.5):

$$\underline{a} = a \frac{3}{2} \underline{n} \underline{n} + 2 \underline{a} \underline{n} + \underline{a}.$$

Aus der Differentialgleichung (3.18) dagegen erhält man $\underline{a}$ aus den fünf unabhängigen Komponenten $\underline{a}^{(m)}$:

$$\underline{a} = \sum_{m=-2}^{+2} \underline{a}^{(m)}.$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Zerlegungen von $\underline{a}$ ist i.a. sehr kompliziert, sodaß sich fünf gekoppelte Randbedingungen für die $\underline{a}^{(m)}$ ergeben. Sie werden entkoppelt durch die Annahme, daß sich die drei Koeffizienten L_{33} , $\mathcal{L}_{33}$ und C_a durch einen einzigen ausdrücken lassen:

$$\frac{3}{2} L_{33} \frac{p_o}{T_o} \frac{c_o}{\sqrt{3}} = 2 \mathcal{L}_{33} \frac{p_o \sqrt{3}}{c_o} = C_a \quad (1)$$

Es erscheint hier nicht sinnvoll, die Auswirkungen einer unterschiedlichen Akkomodation der drei Oberflächen-Komponenten von $\underline{a}$ zu studieren, nachdem für das Gasinnere in (1.10) die Gleichheit der Relaxationskonstanten der drei irreduziblen Bestandteile von $\underline{b}$ angenommen wurde.

Unter Verwendung von (1) können die Gln. (8.3,6,7) folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\underline{a} = \underline{a} \frac{3}{2} \underline{n} \underline{n} + 2 \underline{K} \underline{n} + C_a \underline{n} \cdot \underline{b}, \quad (2)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{L_{31}}{T_o} \frac{1}{2} (q_{\pm} + q_{\text{solid}}) \cdot \underline{n} + \frac{L_{32}}{T_o} q_{\pm}^i \cdot \underline{n}, \\ \underline{K} &= \frac{\sqrt{3}}{c_o} \mathcal{L}_{31} \underline{k}^{\tan} + \frac{\sqrt{3}}{c_o} \mathcal{L}_{32} \nabla_{\tan} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} c_t \frac{T_o}{p_o} k_n^i). \end{aligned} \quad (3)$$

Aus (2) gewinnt man durch Anwendung der Projektionsoperatoren

$\mathcal{P}^{(m)}$ fünf entkoppelte Gleichungen für die $\underline{a}^{(m)}$, denn
 $n_\lambda b_{\lambda\mu\nu}^{(m)}$ enthält nach (3.17) nur $n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{\mu\nu}^{(m)}$.

In Teil B wird die Strömung eines mehratomigen verdünnten Gases im Magnetfeld zwischen parallelen Platten und durch ein Kreisrohr, bei vorgegebenen Druckgradienten, behandelt. Die Temperaturen sind dabei konstant. In Teil C wird die Wärmeleitung des Gases zwischen parallelen Platten im Magnetfeld untersucht. Hierbei wird stets die Differenztemperatur T' vernachlässigt, was in diesem Fall äquivalent ist zur Annahme

$$L_{21} = L_{22} = L_{23} = 0 \quad . \quad (4)$$

Ferner gibt es keine tangentialen Temperaturunterschiede, so daß in (8.4,5,6) stets der Term $\nabla^{\tan} \frac{1}{2} (T + T_{\text{solid}} + \frac{2}{5} C_t \frac{T_0}{p_0} k_n')$ wegfällt. Zur Berechnung der thermomagnetischen Druckdifferenz wird nur die "isotrope" Temperaturverteilung (dh. Vernachlässigung der Anisotropieeffekte) benötigt, in dieser Näherung ist jedoch der Oberflächenwärmestrom $\underline{Q} = \underline{Q}$, sodaß nach (8.9) $\underline{q}_{\text{solid}} \cdot \underline{n} = \underline{q} \cdot \underline{n}$ ist; das wird in der Temperatursprung-Bedingung (8.1) verwendet.

Der Randwert der Tensorpolarisation wird aus den vereinfachten Gln. (2), (3) berechnet. In Gln. (9) - (12) sind die verbleibenden Randbedingungen (8.1,4,8) und (2) zusammengestellt, wobei noch dimensionslose Größen $C_{..}$ anstelle der phänomenologischen Konstanten $L_{..}$ und $\mathcal{L}_{..}$ eingeführt wurden:

$$L_{11} = \frac{\ell}{\lambda_{\text{iso}}} C_t, \quad L_{13} = \frac{\ell}{\lambda_{\text{iso}}} C_{ta}, \quad \mathcal{L}_{11} = \frac{\ell}{\eta_{\text{iso}}} C_m, \quad \mathcal{L}_{13} = \frac{c_0}{2\sqrt{3} p_0} C_{ma} \\ C_{at} = C_{ta}, \quad C_{am} = -C_{ma} \quad (5)$$

Die Bedingungen (8.12) lauten damit:

$$C_t, C_m, C_a \geq 0, \quad C_t C_a - \zeta C_{at}^2 \geq 0, \quad (6)$$

wobei $\zeta = \frac{24}{25} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e' = 0.766 e'.$

Die Größen C_m und C_t sind wohlbekannt unter den Namen "mechanischer Gleitkoeffizient" bzw. "Temperatursprungkoeffizient"; sie hängen zusammen ⁴⁰⁾ mit den Akkomodationskoeffizienten für Tangentialimpuls (α_m) und Energie (α_e):

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{2 - \alpha_m}{\alpha_m} \frac{5\pi}{16} = \frac{2 - \alpha_m}{\alpha_m} 0.982 \\ C_t &= \frac{2 - \alpha_e}{\alpha_e} \frac{25\pi}{16} \frac{1}{e^*(1 + 3/c_t)} \quad ; \end{aligned} \quad (7)$$

aus $\alpha_{..} \leq 1$ folgt $\frac{2 - \alpha_{..}}{\alpha_{..}} \gg 1$. Der in C_t auftretende Zahlenfaktor wird jetzt noch angegeben für die hier betrachteten Gase:

	HD	CH ₄	CO	N ₂	
$\frac{25\pi}{16} \frac{1}{e^*(1 + 3/c_t)}$	= 1.727	1.672	1.585	1.606	. (8)

Der Koeffizient C_a hängt mit der Akkomodation der Tensorpolarisation zusammen ²⁰⁾, C_{ma} charakterisiert die thermomagnetische Gleitung, C_{ta} den durch $b = \underline{n} \cdot \underline{b} : (\underline{n} \underline{n})$ induzierten Temperatursprung, und C_{am} , C_{at} beschreiben die Erzeugung von Tensorpolarisation am Rand durch mechanische Kräfte und durch Wärmeströme.

In den Gleichungen (13) - (17) sind die durch Vernachlässigung der Differenztemperatur T' vereinfachten Differentialgleichungen (5.1,8,11) und (3.18) sowie in (18) - (22) die entsprechenden Ansätze (3.1,⁴10,19) aufgeschrieben; dabei wurde nach (5.4) $\underline{\nabla} \cdot \underline{p} = - \underline{\nabla} p$ eingesetzt.

Mit der Lösung dieses Systems von Ansätzen, Differentialgleichungen und Randbedingungen für spezielle Probleme werden sich die Teile B und C dieser Arbeit befassen.

Randbedingungen

$$T - T_{solid} + \frac{2}{5} c_t \frac{T}{p_0} K_n' = C_t \frac{\lambda}{\lambda_{iso}} \frac{q}{T} \cdot \bar{n} + T_0 \int C_{ta} \bar{n} \cdot \bar{b} : (\bar{n} \bar{n}) \quad (9)$$

$$(\bar{v} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} q^T) \tan = C_m \frac{\lambda}{\eta_{iso}} \overline{K}^{\tan} + \frac{C_0}{\sqrt{3}} C_{ma} (\bar{n} \cdot \bar{b} \cdot \bar{n})^{\tan} \quad (10)$$

$$\bar{\bar{a}} = C_{at} \frac{\lambda}{T_0 \lambda_{iso}} \frac{q}{T} \cdot \bar{n} \frac{3}{2} \overline{\bar{n} \bar{n}} + C_{am} \frac{1}{p_0} \overline{K^{\tan} \bar{n}} + C_a \bar{n} \cdot \bar{b} \quad (11)$$

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = 0 \quad (12)$$

Differentialgleichungen

$$\bar{v} \cdot \bar{v} T = \frac{2}{5} T_0 \frac{\lambda_{iso}}{\lambda_{iso}} \sqrt{\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}}} \bar{v} \cdot (\bar{v} \cdot \bar{\bar{a}}) - \frac{p_r c_0}{\sqrt{2}} \frac{(1 - A_{ti})^{-1/2}}{\sqrt{\lambda_{iso} \lambda_{iso}}} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_t}} a_{ikt} \bar{v} \cdot \bar{B} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\eta_{iso}} \bar{v} p - \bar{v} \cdot \bar{v} \bar{v} = \frac{p_r}{\eta_{iso}} \sqrt{\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_{\eta}}} \bar{v} \cdot \bar{\bar{a}} + \frac{2}{5} \frac{C_0}{\sqrt{2}} (1 - A_{ti})^{-1/2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_t}} a_{kt} (\bar{v} \cdot \bar{B} - \bar{v} \cdot \bar{v} \bar{B}) \quad (14)$$

$$(1 - L_m^2 \bar{v} \cdot \bar{v}) \mathcal{P}^{(m)} : \bar{\bar{a}} = \frac{1}{1 + L_m \eta_t^0} \mathcal{P}^{(m)} : \left[\sqrt{\frac{\omega_{\eta T}}{\omega_t}} \frac{\eta_{iso}}{p_0} (\bar{v} \cdot \bar{v} + \frac{2}{5} \frac{1}{p_0} \bar{v} q^T) - \frac{\lambda_T}{1 + L_m \eta_K^0} \overline{\bar{v} \bar{a}^{(34)}} \right] \quad (15)$$

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{\bar{a}}^{(34)} = \frac{3}{5} \frac{\sqrt{2}}{p_0 c_0} \lambda_{iso} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}^t}{\lambda_{iso}}} (1 - A_{ti}) \frac{\omega_t}{\omega_K} \left[\bar{v} T a_{ikt} - \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} \bar{v} p a_{kt} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}^t}{\lambda_{iso}}} \right] \quad (17)$$

Ansätze

$$\underline{\underline{P}} = -\lambda \eta_{iso} \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} + \frac{2}{5} \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{q}}^{tr} \right] - \rho \sqrt{2} \frac{\omega \eta_T}{\omega_T} \underline{\underline{a}} \quad (18)$$

$$\underline{\underline{2}}^{tr} = -\lambda_{iso}^{tr} \underline{\underline{\nabla}} T + \frac{2}{5} \frac{1}{\rho} \lambda_{iso}^{tr} \underline{\underline{\nabla}} p - \frac{\rho c}{\sqrt{2}} \alpha_{kt} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} (1 - A_t)^{-1/2} \underline{\underline{3}} \quad (19)$$

$$\underline{\underline{2}} = -\lambda_{iso} \underline{\underline{\nabla}} T + \frac{2}{5} \frac{1}{\rho} \lambda_{iso} \underline{\underline{\nabla}} p - \frac{\rho c}{\sqrt{2}} \alpha_{kt} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\lambda_t^e} \frac{\omega_k}{\omega_t}} (1 - A_t)^{-1/2} \underline{\underline{3}} \quad (20)$$

$$\underline{\underline{C}}_{i,\mu\nu} = \sum_{m=-2}^{+2} \frac{1}{1+m q_k} \mathcal{P}_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{(m)} \left[-\ell_k \frac{\partial Q_k^{i\nu'}}{\partial X_k} + a_{\lambda}^{(342)} \Delta_{\lambda\lambda'k}^{(12)} \Delta_{\lambda'\lambda k}^{i\nu'} \right] \quad (21)$$

$$\underline{\underline{3}} = \frac{5}{3} \left[\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{\Delta}}(q_k) \right] \underline{\underline{a}}^{(34)} - \ell_k \underline{\underline{\nabla}} \cdot \left[\underline{\underline{\Delta}}^{(12)} - \underline{\underline{\Gamma}}(q_k) \right] \underline{\underline{3}} \quad (22)$$

$$\underline{\underline{\Delta}}(q_k) = \frac{2}{5} \underline{\underline{P}} \left(\frac{q_k^2}{1+q_k^2} + \frac{3}{10} \underline{\underline{P}} \left(\frac{q_k^2}{1+q_k^2} + \frac{8 q_k^2}{1+4 q_k^2} \right) + \frac{2}{5} \underline{\underline{\Gamma}}^{tr} \left(\frac{q_k^2}{1+q_k^2} + \frac{4 q_k^2}{1+4 q_k^2} \right) \right) \quad (23)$$

$$\widehat{\Pi}(q_k) = \sum_{m=1}^2 \left[\frac{m^2 q_k^2}{1+m^2 q_k^2} \left(\mathcal{P}^{(m)} + \underline{\underline{\Gamma}}^{(-m)} \right) + \frac{m^2 q_k^2}{1+m^2 q_k^2} \mathcal{L} \left(\mathcal{P}^{(m)} - \underline{\underline{\Gamma}}^{(-m)} \right) \right] \quad (24)$$

TEIL B

KNUDSEN - KORREKTUREN

AM

SENFTLEBEN - BEENAKKER - EFFEKT

DER VISKOSITÄT

§10. Vorbemerkungen. Isotrope Lösungen.

Der SBE der Viskosität und Wärmeleitfähigkeit ist im "hydrodynamischen Grenzfall" (siehe §3.(c)) nur eine Funktion des Winkels $\varphi_{..} = \omega_H / \omega_{..} \sim H/p_0$ ($\omega_{..} = \omega_\tau$ bzw. ω_K), hängt also von der Stärke H des Magnetfelds und vom Druck p_0 nur in der Form H/p_0 ab. Wenn nun bei niedrigerem Druck die freie Weglänge im Gas vergleichbar wird mit Abmessungen der Apparatur, dann gibt es eine zusätzliche Druckabhängigkeit derart, daß die Größe des Effekts, charakterisiert durch den Sättigungswert der Longitudinaleffekte ($\lambda_{||}, \lambda_{\perp}, \eta_2, \eta_3$) und den Maximalwert der Transversaleffekte ($\lambda_{\text{transv}}, \eta_4, \eta_5$), abnimmt, und daß der halbe Sättigungswert bzw. das Maximum bei höheren $\varphi_{..}$ -Werten erreicht werden, als bei hohem Druck. Diese Knudsen-Korrekturen wurden gemessen von Mitarbeitern Prof. Beenackers am Kamerlingh-Onnes Laboratorium in Leiden; für den SBE der Wärmeleitfähigkeit wurden von Hermans e.a. ¹¹⁾ Daten über die Größe der Korrekturen angegeben, für den SBE der Viskosität gibt es entsprechende Angaben von Korving ⁸⁾ und vor allem von Hulsman e.a. ⁹⁾¹⁰⁾. Die Messungen wurden in Kreiskapillaren ⁸⁾ und in einem sehr flachen rechteckigen Kanal ⁹⁾¹⁰⁾ durchgeführt.

Zur Berechnung der Knudsen-Korrekturen am SBE der Viskosität wird die Strömung eines verdünnten mehratomigen Gases im unendlich langen Kreisrohr und zwischen parallelen (unendlich ausgedehnten) Platten untersucht. Das Ziel ist die Ermittlung der vom Magnetfeld hervorgerufenen Druckgradienten, und dazu müssen auch Differentialgleichung und Randbedingung für die Tensorpolarisation a gelöst werden. Wegen der Kleinheit der Feldeffekte können die Anisotropiegrößen a und b näherungsweise aus der feldfreien Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden, und in dieser kann der Beitrag von a und b ebenfalls vernachlässigt werden. Demnach wird folgende Störungsrechnung durchgeführt:

Unter Vernachlässigung von a und b (was durch den Index "iso" angedeutet werden soll) wird zuerst das "isotrope" Strömungsfeld v_{iso} berechnet, aus diesem werden dann die Tensorpolarisation a und ihr Strom b abgeleitet, und damit werden schließlich die durch die Ausrichtungseffekte und das Mag-

netfeld hervorgerufene zusätzliche Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v}_1$ und der gesuchte Druckgradient $\underline{\nabla} p_1$ ermittelt.

In diesem Abschnitt sollen nun die isotropen Lösungen für die Strömung des Gases durch das Kreisrohr (Durchmesser $2R$) und zwischen den parallelen Platten (Abstand $2d$) gemeinsam behandelt werden. Vorgegeben ist der konstante Druckgradient ohne Magnetfeld

$$\underline{\nabla} p^{(0)} \equiv \underline{\nabla} p(\underline{x}, \underline{H}=\underline{0}) = \underline{e} \left(\frac{d p}{d z} \right)_0 ; \quad (1)$$

der Einheitsvektor $\underline{e}$ gibt die Richtung der Rohrachse bzw. die Strömungsrichtung beim Plattenproblem an. Der zu $\underline{e}$ senkrechte Einheitsvektor $\underline{u}$ soll die Richtung senkrecht zu den Platten (siehe Fig.1.) bzw. den radialen Einheitsvektor (siehe Fig.2.)

$$\underline{u} = \frac{1}{r} (\underline{x} - \underline{e} (\underline{x} \cdot \underline{e})) , \quad r = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x} - (\underline{x} \cdot \underline{e})^2} \quad (2)$$

bezeichnen, und $\underline{x}$ den Ortsvektor.

Bei Vernachlässigung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ können die Temperaturen als konstant angenommen werden

$$T_{\text{iso}} = \text{const} = T_0 = T_{\text{solid}} , \quad T'_{\text{iso}} = 0 , \quad (3)$$

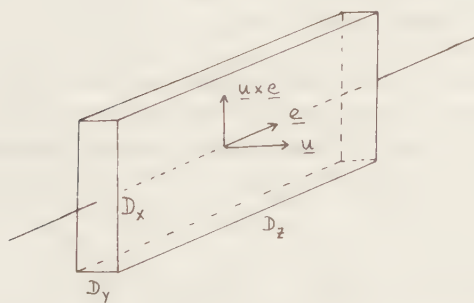


Fig.1. Messung aller Viskositätskoeffizienten ⁹⁾¹⁰⁾ im flachen rechteckigen Kanal ($D_z \gg D_x \gg D_y$), der durch parallele Platten vom Abstand $D_y = 2d$ angenähert wird. $U = y$; Oberflächen bei $U_0 = \pm d$, mit $\underline{n} \cdot \underline{u} = \pm 1$.

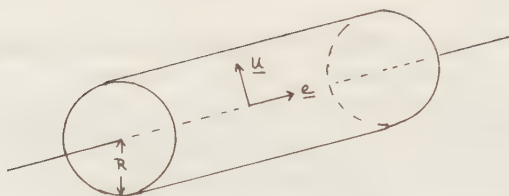


Fig.2. Messung longitudinaler Viskositätskoeffizienten ⁸⁾ im Kreisrohr. $U = r$ ist der senkrechte Abstand von der Achse; Oberfläche bei $U_0 = R$, mit $\underline{n} \cdot \underline{u} = +1$.

dann sind aber die Wärmeströme allein durch $\underline{\nabla} p^{(0)}$ bestimmt und damit konstant, also nach (9.19)

$$q_{iso}^{tr} = \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} \lambda_{iso}^t \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{e} \quad (4)$$

damit ist der Drucktensor nach (9.18) einfach $\underline{\underline{p}}_{iso} = -2\eta_{iso} \underline{\underline{\nabla}} \underline{v}_{iso}$.

Da $\underline{v}_{iso}$ feldunabhängig ist, kann es nur von $U = \underline{u} \cdot \underline{x}$ (Rohr: $U = r$, Platten: $U = y$) abhängen und parallel zu $\underline{\nabla} p^{(0)}$ sein:

$$\underline{v}_{iso} = \frac{U_0^2}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 V_{iso}(U) \underline{e} \quad (5)$$

Mit diesem Ansatz ist automatisch $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_{iso} = 0$, und am Rand gibt es keine Normalkomponenten: $\underline{n} \cdot \underline{v}_{iso} = 0$, $(k_n')_{iso} = 0$; die Randbedingungen (8.1,2) für T_{iso} und T'_{iso} sind mit (3) also identisch erfüllt. Der Oberflächenwärmestrom Q_{iso} ist nach (8.5) konstant, somit ist die Beziehung (8.9) trivial erfüllt. Jetzt können die vereinfachten Differentialgleichungen, Randbedingungen und Ansätze aus §9 verwendet werden; es bleiben für $\underline{v}_{iso}$ (9.14)

$$\frac{1}{U_0^2} = \frac{d^2 V_{iso}}{dU^2} + \frac{dV_{iso}}{dU} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \quad (6)$$

und (9.10)

$$V_{iso}(U_0) + \underline{n} \cdot \underline{u} \ell C_m \left(\frac{dV_{iso}}{dU} \right)_{U_0} = -\frac{2}{5} \frac{l_t l_t}{U_0^2}, \quad (7)$$

dabei ist l_t die freie Weglänge $l_t = \frac{c_0}{\sqrt{3} \omega_t (1 - A_{ti})} \approx \frac{c_0}{\sqrt{3} \omega_t}$.

Beim Plattenproblem gilt $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$, und für $U_0 = \frac{\tau}{d}$ ist $\underline{n} \cdot \underline{u} = \frac{\tau}{d}$,
 bei der Rohrströmung ist $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{U}$, und $U_0 = R$, $\underline{n} \cdot \underline{u} = +1$.

Die Lösung der Differentialgleichung (6) und der Randbedingung (7) liefert das bekannte quadratische Geschwindigkeitsprofil; mit (5) erhält man für $\underline{v}_{iso}$ und $\underline{v}_{iso}$ (gemittelt über den Querschnitt) bei der Plattenströmung

$$\begin{aligned} \underline{v}_{iso} &= -\frac{d^2}{2\eta_{iso}} \left[1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2 + 2\frac{\ell}{d} C_m + \frac{4}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{d^2} \right] \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \underline{e} \\ \overline{v}_{iso} &= -\frac{d^2}{3\eta_{iso}} \left[1 + 3\frac{\ell}{d} C_m + \frac{6}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{d^2} \right] \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \underline{e} \end{aligned} \quad (8)$$

sowie bei der Rohrströmung

$$\begin{aligned} \underline{v}_{iso} &= -\frac{R^2}{4\eta_{iso}} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{\ell}{R} C_m + \frac{8}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{R^2} \right] \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \underline{e} \\ \overline{v}_{iso} &= -\frac{R^2}{8\eta_{iso}} \left[1 + 4\frac{\ell}{R} C_m + \frac{16}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{R^2} \right] \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \underline{e} \end{aligned} \quad (9)$$

Die in der freien Weglänge quadratischen Anteile gehen zurück auf die durch den Wärmestrom (4) bestimmte "thermische" Gleitung in der Randbedingung (7); man kann sie vernachlässigen, wenn man sich nur für die in 1 linearen Beiträge interessiert.

Mit Hilfe dieser isotropen Lösung werden im Folgenden die Anisotropiegrößen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ berechnet. Die Differentialgleichungen (9.15) vereinfachen sich hier zu

$$(1 - L_m^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}) \underline{P}^{(m)} : \underline{a} = \frac{\sqrt{2}}{p_0} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 U_0^2 \frac{dV_{iso}}{dU} \frac{1}{1 + i m \ell_T} \underline{P}^{(m)} : \underline{\overline{e u}}, \quad (10)$$

wobei für die Rohrströmung $\frac{dV_{iso}}{dU} = \frac{\tau}{2R^2}$, und für die Plattenströmung $\frac{dV_{iso}}{dU} = \frac{\tau}{d^2}$ einzusetzen ist. Dazu kommt die Randbedingung

(9.11) für die Tensorpolarisation

$$\underline{a} = \underline{n \cdot u} C_a \underline{u \cdot b} - C_{am} \frac{1}{p_0} \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 U_0^2 \left(\frac{dV_{iso}}{dU}\right)_0 \underline{\overline{e u}} \quad (11)$$

I. STRÖMUNG ZWISCHEN PARALLELEN PLATTEN

§11. Berechnung der Anisotropiegrößen und des Feldeinflusses auf die Strömung.

Zunächst werden aus dem isotropen Strömungsfeld $\underline{v}_{iso}$ die Tensorpolarisation und ihr Strom berechnet und dann wird damit die Strömung im Magnetfeld bestimmt.

(a) Tensorpolarisation und Tensorpolarisationsstrom

Wenn anstelle von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Größen $\tilde{\underline{a}}$ und $\tilde{\underline{b}}$

$$\underline{a} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \frac{d}{p_0} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \tilde{\underline{a}}, \quad \underline{b} = -\sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \frac{k}{p_0} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \tilde{\underline{b}} \quad (1)$$

eingeführt werden, so genügen diese nach (10.10,11) den Differentialgleichungen ($m = 0, \pm 1, \pm 2$)

$$(1 - L_m^2 \nabla \cdot \nabla) \mathcal{P}^{(m)} : \tilde{\underline{a}} = \frac{y}{d} \frac{1}{1 + im\varphi_T} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}},$$

und der Randbedingung

$$\tilde{\underline{a}}(y = \pm d) = \mp \left(\frac{L_0}{d} \tilde{C}_a (\underline{u} \cdot \tilde{\underline{b}})_{\pm d} + \tilde{C}_{am} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}} \right);$$

$\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{am}$ sind neue Bezeichnungen für C_a und C_{am} :

$$C_a = \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_T}} \tilde{C}_a, \quad C_{am} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \tilde{C}_{am}, \quad \tilde{C}_{ma} = -\tilde{C}_{am}. \quad (2)$$

Der Ansatz $\mathcal{P}^{(m)} : \tilde{\underline{a}} = \left[\frac{y}{d} \frac{1}{1 + im\varphi_T} + A_m(y) \right] \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}}$

liefert für A_m die homogene Differentialgleichung

$A_m - L_m^2 \frac{d^2}{dy^2} A_m = 0$. Von den beiden Lösungen $\sinh \frac{y}{L_m}$ und $\cosh \frac{y}{L_m}$ kommt aufgrund der Randbedingung nur $\sinh \frac{y}{L_m}$ in

Frage:

$$\tilde{\underline{a}} = \sum_{m=-2}^{+2} \left[\frac{y}{d} \frac{1}{1 + im\varphi_T} - \alpha_m \frac{\sinh \frac{y}{L_m}}{\sinh \frac{d}{L_m}} \right] \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}}. \quad (3)$$

Aus der m-Komponente der Randbedingung ergibt sich die Konstante α_m . Dazu wird zunächst nach (9.17) der Vektor $\underline{a}_{iso}^{(3+)}$ angegeben; unter Verwendung der Beziehungen (3.7, 8, 20) für a_{kt} , λ_{iso}^t und l_k kann er folgendermaßen geschrieben werden

$$\underline{a}_{iso}^{(3+)} = -\sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \frac{l_k}{p_o} \left(\frac{dp}{dz} \right)_o a_{Tt} \underline{e}, \quad (4)$$

wobei a_{Tt} eine Abkürzung ist für ein Verhältnis von Relaxationskonstanten (Gl. (1.21), $\omega_{\eta T} = \sqrt{5} \omega_{kt}$, wurde verwendet)

$$a_{Tt} = \frac{1}{5} \frac{\omega_T}{\omega_t} \left[1 + \frac{\omega_{ki}}{\omega_{kt}} \frac{(-\omega_{ti})}{\omega_i} \right] (1 - A_{ti})^{-1}. \quad (5)$$

Mit dem Ansatz (9.21) für den Strom der Tensorpolarisation und mit (3), (4) erhält man für $y = \frac{1}{2} d$

$$\underline{u} \cdot \underline{D} = \sum_{m=-2}^{+2} \frac{1}{1 + im\varphi_k} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u} \left[\frac{1}{1 + im\varphi_T} - \alpha_m \frac{d}{L_m} \coth \frac{d}{L_m} + a_{Tt} \right]. \quad (6)$$

Die m-Komponente der Randbedingung läßt sich nun leicht nach α_m auflösen, mit dem Ergebnis

$$\alpha_m = \frac{\frac{1}{1 + im\varphi_T} + \tilde{C}_{am} + \tilde{C}_a \frac{L_o}{d} \frac{1}{1 + im\varphi_k} \left(\frac{1}{1 + im\varphi_T} + a_{Tt} \right)}{1 + \tilde{C}_a \sqrt{\frac{1 + im\varphi_T}{1 + im\varphi_k}} \coth \frac{d}{L_m}} \quad (7)$$

Da die vorstehenden Rechnungen nur sinnvoll sind für nicht zu große Werte von L_o/d , spielt im Gasinneren ($|y| \ll d$) der zu α_m proportionale Term im Ausdruck (3) für die Tensorpolarisation keine Rolle gegen den ersten Term. In der Nähe der Platte $y_o = +d$ gilt für $0 \leq d - y \ll d$ und $L_o/d \ll 1$

$\sinh \frac{y}{L_m} / \sinh \frac{d}{L_m} \approx \exp(-\frac{d-y}{L_m})$, daher klingt der zu α_m proportionale Anteil der Tensorpolarisation vom Rand her auf Null ab, und etwa im Abstand L_o hat $\tilde{a}$ den durch den Drucktensor bestimmten Wert

$$\tilde{a}^{(o)} = \frac{y}{d} \sum_{m=-2}^{+2} \frac{1}{1 + im\varphi_T} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u}$$

angenommen. Die Bedeutung der Randeffekte erkennt man am Rand-

wert ($y_0 = +d$) der Tensorpolarisation: Für $\tilde{C}_a \rightarrow \infty$ ist α_m proportional zur freien Weglänge $\alpha_m = \frac{L_m}{d} \left(\frac{1}{1+im\varphi_T} + a_{T+} \right) \left/ \coth \frac{d}{L_m} \right.$, spielt also neben $\frac{1}{1+im\varphi_T}$ keine große Rolle. Dagegen ist für $C_a = 0$ $\alpha_m = \frac{1}{1+im\varphi_T} + \tilde{C}_{am}$, der Randwert von $\tilde{a}$ ist dann allein durch C_{am} bestimmt und unabhängig vom Magnetfeld

$\tilde{a}(y=\pm d) = \mp \tilde{C}_{am} \overline{e} \underline{u}$. Demnach wird der Randwert der Tensorpolarisation stark (wenig) beeinflusst durch die Randeffekte, wenn $\tilde{C}_a$ klein (groß) ist.

Jetzt können die in der Differentialgleichung (9.14) für $\underline{v}_1$ auftretenden Ableitungen der Tensorpolarisation $\underline{a}$ und des Kaganvektors $\underline{B}$ angegeben werden. Nach (9.22) gilt für $\tilde{\underline{B}}$ ($\tilde{B}_\mu = \tilde{b}_{\lambda, \lambda\mu}$)

$$\tilde{\underline{B}} = \frac{5}{3} a_{T+} \left(\underline{e} - \underline{\underline{A}}(\varphi_K) \cdot \underline{e} \right) + \sum_{m=-2}^{+2} \underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \overline{e} \underline{u} \frac{1}{1+im\varphi_K} \left[\frac{1}{1+im\varphi_T} - \frac{d}{L_m} \bar{\alpha}_m \cosh \frac{y}{L_m} \right], \quad (8)$$

wobei $\bar{\alpha}_m$ eine Abkürzung ist für $\bar{\alpha}_m = \alpha_m / \sinh \frac{d}{L_m}$.

Damit findet man

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} \frac{C_0}{\sqrt{2}} (1-A_{ti})^{-1/2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_t}} a_{Kt} \left(\underline{\nabla} \underline{\nabla} \cdot \underline{B} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{B} \right) = \\ & = -A_{\eta T} \frac{1}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 a_{Tt} L_0^2 \sum_{m=-2}^{+2} 2 \left(\underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \overline{e} \underline{u} \right)^{\tan} \frac{\bar{\alpha}_m}{1+im\varphi_K} \frac{d}{L_m^3} \cosh \frac{y}{L_m}, \end{aligned} \quad (9)$$

außerdem folgt aus (1) und (3)

$$\begin{aligned} & \frac{p_0}{\eta_{iso}} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_\eta} \underline{\nabla} \cdot \underline{a} = \\ & = A_{\eta T} \frac{1}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \sum_{m=-2}^{+2} 2 \underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \overline{e} \underline{u} \left(\frac{1}{1+im\varphi_T} - \frac{d}{L_m} \bar{\alpha}_m \cosh \frac{y}{L_m} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Für einen beliebigen Vektor $\underline{a}(y)$, $-d \leq y \leq +d$, bedeutet $\underline{a}^{\tan}$ die "Tangentialkomponente" $\underline{a}^{\tan} = \underline{a} - \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{a})$.

(b) Strömung im Magnetfeld

Die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v}$ setzt sich aus einem "isotropen", feldfreien Anteil $\underline{v}_{iso}$ und einem "anisotropen", feldabhängigen Anteil $\underline{v}_1$ zusammen:

$$\underline{v}(\underline{x}, \underline{H}) = \underline{v}_{iso}(\underline{x}) + \underline{v}_1(\underline{x}, \underline{H}) \quad ; \quad (11)$$

$\underline{v}_1$ ist durch die Anisotropiegrößen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bestimmt.

Mit der Annahme, daß auch $\underline{v}_1$ nur von y abhängt, folgt aus

$\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_1 = 0 = \frac{d}{dy} (\underline{u} \cdot \underline{v}_1)$, daß $\underline{u} \cdot \underline{v}_1 = \text{const}$ ist; da aber am Rand ($y = \pm d$, $\underline{n} = \pm \underline{u}$) $\underline{u} \cdot \underline{v}_1 = 0$ ist, gilt für alle y : $\underline{u} \cdot \underline{v}_1 = 0$, $\underline{v}_1$ hat also nur "Tangentialkomponenten":

$$\underline{v}_1(\underline{x}, \underline{H}) = A_{\eta\tau} \frac{d^2}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{V}(y, \underline{H}) \quad , \quad \underline{u} \cdot \underline{V} = 0 \quad . \quad (12)$$

Ohne Magnetfeld ($\underline{H} = \underline{0}$) hat $\underline{v}_1$ die Richtung des Druckgradienten $\underline{\nabla} p^{(0)}$, und die Temperaturen sind konstant (siehe (10.3))

$$T(\underline{x}, \underline{H}=\underline{0}) = T_{iso} = T_0 \quad , \quad T'(\underline{x}, \underline{H}=\underline{0}) = T'_{iso} = 0 \quad , \quad (13)$$

denn nach (8), (10) ist dann $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \cdot \underline{a})$, sowie nach

(6) auch $\underline{b} = \underline{u} \cdot \underline{b} (\underline{u} \cdot \underline{u}) = 0$, die Differentialgleichungen

(5.8,9) und die Randbedingungen (8.1,2) sind also erfüllt.

Mit Magnetfeld sind T und T' nicht mehr konstant, können aber nur von y abhängen, sodaß $\underline{\nabla} T$ und $\underline{\nabla} T'$ parallel zu $\underline{u}$ sind. Daher spielen die Temperaturen keine Rolle in der

Differentialgleichung und Randbedingung für $\underline{v}_1$, die in der einfachen Form des §9 verwendet werden können. Hier soll auf die Berechnung von $T(\underline{x}, \underline{H}) - T_0$ und $T'(\underline{x}, \underline{H})$, die von der Größenordnung der Ausrichtungseffekte sind, verzichtet werden.

Da $\underline{v}_1$, T , T' nur von y abhängen, muß auch $\underline{\nabla} p$ eine Funktion von y allein sein, dann gilt: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x}$

und $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z}$, folglich müssen $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ konstant sein. Der Druckgradient wird daher angesetzt als (siehe (10.1))

$$\underline{\nabla} p = \underline{e} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 + \underline{u} \frac{\partial p}{\partial y} + A_{\eta\tau} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{P} \\ \underline{P} \cdot \underline{u} = 0 \quad , \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{H}) = \underline{\text{const}} \quad , \quad (14)$$

für $\underline{H} = \underline{0}$ ist $\frac{\partial \underline{p}}{\partial y} = 0$ und $\underline{P} = \underline{0}$. Da $\underline{P}$ die experimentell interessierende Größe ist, wird auf die Berechnung von $\frac{\partial \underline{p}}{\partial y}$ (das mit $\frac{d\tau^1}{dy}$ gekoppelt ist) verzichtet.

Durch Subtraktion der "isotropen" Differentialgleichung

$\frac{1}{\eta_{iso}} \left(\frac{d\underline{p}}{dz} \right) \underline{e} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}_{iso} = \underline{0}$ von der Tangentialkomponente der Gl.

(9.14) für $\underline{v}$ erhält man mit (9), (10) die folgende Differentialgleichung für $\underline{v}$

$$\frac{d^2}{dy^2} \underline{v} = \frac{1}{d^2} \underline{P} - \frac{d^2}{dy^2} \sum_{m=-2}^{+2} (2\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u})^{\tan} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 \frac{1}{1 + i m \varphi_T} - \frac{L_m}{d} \bar{\alpha}_m \cosh \frac{y}{L_m} \left(1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt} \right) \right].$$

Aufgrund der Randbedingung (siehe (21)) ist $\underline{v}$ eine gerade Funktion von y , daher folgt für $\underline{v}$

$$\underline{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 \underline{P} - \underline{R} - \sum_{m=-2}^{+2} (2\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u})^{\tan} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 \frac{1}{1 + i m \varphi_T} - \frac{L_m}{d} \bar{\alpha}_m \cosh \frac{y}{L_m} \left(1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt} \right) \right]. \quad (15)$$

und für die mittlere Geschwindigkeit

$$\underline{V} = \frac{1}{6} \underline{P} - \underline{R} - \sum_{m=-2}^{+2} (2\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u})^{\tan} \cdot \left[\frac{1}{6} \frac{1}{1 + i m \varphi_T} - \left(\frac{L_m}{d} \right)^2 \bar{\alpha}_m \left(1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt} \right) \right]. \quad (16)$$

Dabei ist $\underline{R} = \underline{R}(\underline{H})$ ein konstanter Tangentialvektor ($\underline{R} \cdot \underline{u} = 0$), ebenso wie $\underline{P}$, damit müssen also vier Konstanten bestimmt werden. Aus den Randbedingungen ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen, zwei weitere werden demnach noch benötigt. Eine Bedingung folgt aus der "Massenerhaltung in $\underline{u} \times \underline{e}$ Richtung", denn seitlich (dh. senkrecht zu $\underline{\nabla} p^{(0)}$) soll kein Gas entweichen

$$(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{V} = 0; \quad (17)$$

das gilt sicher auch für die wirkliche experimentelle Anordnung, die aus einem flachen rechteckigen Kanal besteht (siehe Fig. 1.). Die Auswertung von Gl. (17) liefert einen Zusammenhang zwischen den x-Komponenten von R und P

$$(\underline{1} \times \underline{e}) \cdot \underline{R} = \frac{1}{6} (\underline{1} \times \underline{e}) \cdot \underline{P} - \sum_{m=-2}^{+2} 2(\underline{1} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u} \left[\frac{\frac{1}{6}}{1 + im\varphi_T} - \left(\frac{L_m}{d}\right)^2 \alpha_m (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right] \quad (18)$$

Ein Zusammenhang zwischen den z-Komponenten von R und P ergibt sich aus dem Meßverfahren⁹⁾¹⁰⁾, denn die "Schachtel" ist in eine Bruckenanordnung eingebaut (siehe Anhang IV), und folglich gibt es eine Beziehung zwischen dem durch das Magnetfeld hervorgerufenen Massenstrom und dem zusätzlichen Druckgradienten in Strömungsrichtung:

$$\overline{v(x, H)} - \overline{v(x, 0)} = \delta \underline{e} \cdot [\nabla p(x, H) - \nabla p(x, 0)] \frac{\overline{v(x, 0)}}{(-\underline{e} \cdot \nabla p(x, 0))} \quad (19)$$

Der Wert von δ hängt davon ab, welche Größe beim Einschalten des Magnetfelds konstant gehalten wird; wenn in der idealen Brücke die äußeren Drucke p_A und p_B konstant bleiben ist $\delta = 1$ (siehe Anhang IV), dagegen ist $\delta = 0$, wenn der Gasstrom durch die rechteckige Kapillare konstant bleibt. Dieser zweite Fall trifft für die Praxis⁹⁾¹⁰⁾ zu, es wird sich aber in (23) zeigen, daß die Meßgröße $(1 + \delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$ unabhängig von δ ist. Da $\nabla p(x, H) - \nabla p(x, 0)$ von der Größenordnung $A\eta_T \left(\frac{dp}{dz}\right)_0$ ist, kann man auf der rechten Seite von (19) $\overline{v(x, 0)}$ ersetzen durch $\underline{v}_{iso}(x)$. Damit ergibt sich unter Verwendung von (10.8) die Beziehung

$$\underline{e} \cdot \overline{v(x, H)} - \underline{e} \cdot \overline{v(x, 0)} \approx \delta \underline{e} \cdot \underline{P} \left(\frac{1}{3} \left(1 + 3 \frac{L}{d} C_m + \frac{6}{5} \delta \frac{\ell_T \ell_t}{d^2} \right) \right),$$

die zu folgendem Zusammenhang zwischen den z-Komponenten von R und P führt:

$$\underline{e} \cdot \underline{R}(H) - \underline{e} \cdot \underline{R}(0) = -\frac{1}{6} \underline{e} \cdot \underline{P} \left(2\delta - 1 + 6\delta \frac{L}{d} C_m + \frac{12}{5} \delta \frac{\ell_T \ell_t}{d^2} \right) + \sum_{m=-2}^{+2} 2(\underline{e} \underline{u}) \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u} \left[\frac{\frac{1}{6} im\varphi_T}{1 + im\varphi_T} + \alpha_m \left(\frac{L_m}{d}\right)^2 (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) - \alpha_0 \left(\frac{L_0}{d}\right)^2 (1 + a_{Tt}) \right] \quad (20)$$

Zwei weitere Beziehungen zwischen $\underline{R}$ und $\underline{P}$ ergeben sich aus der Gleitrandbedingung für $\underline{v}_1$, die man aus (9.10) erhält durch Subtraktion von

$$\left(\underline{v} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\rho} q_{\underline{t}}^{\text{tr}} \right)_{\text{iso}}^{\text{tan}} = \frac{\ell}{\eta_{\text{iso}}} C_m \underline{k}_{\text{iso}}^{\text{tan}} :$$

$$\left(\underline{v} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\rho} q_{\underline{t}}^{\text{tr}} \right)_1^{\text{tan}} = \frac{\ell}{\eta_{\text{iso}}} C_m \underline{k}_1^{\text{tan}} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} C_{ma} \underline{b} , \quad \underline{b} = (\underline{n} \cdot \underline{b} \cdot \underline{n})^{\text{tan}} .$$

Nach (9.19) und (14) gilt für den translatorischen Wärmestrom

$$(q_{\underline{t}}^{\text{tr}})_1^{\text{tan}} = \frac{2}{5} \frac{T_0}{\rho_0} \lambda_{\text{iso}}^t A_{\eta T} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{P} - \frac{\rho_0 c_0}{\sqrt{2}} a_{kt} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_t}} (1 - A_{ti})^{-1/2} \underline{B} .$$

Die tangentielle Reibungskraft $\underline{k}_1^{\text{tan}}$ kann man mit Hilfe des Ansatzes (9.1) für $\underline{p}_1$ berechnen, oder einfacher erhalten durch Integration der Tangentialkomponente der stationären Impulsbilanz (5.4)

$$\left(\underline{v} \cdot \underline{p}_1 \right)^{\text{tan}} + A_{\eta T} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{P} = \underline{\sigma} .$$

Nun ist $\left(\underline{v} \cdot \underline{p}_1 \right)^{\text{tan}} = \frac{d}{dy} (\underline{u} \cdot \underline{p}_1)^{\text{tan}}$ und $\underline{P}$ ist konstant, die Gleichung kann also einfach integriert werden

$$(\underline{u} \cdot \underline{p}_1)^{\text{tan}} + y A_{\eta T} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{P} = \underline{\text{const}} = \underline{\sigma} ,$$

somit ist für $y = \frac{1}{2} d$, $\underline{n} = \frac{1}{2} \underline{u}$, $\underline{k}_1^{\text{tan}} = -d A_{\eta T} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{P}$.

Mit $\underline{b}$ aus (11.6) und $\underline{B}$ aus (11.8) führt dann die Randbedingung für $\underline{v}_1$ auf folgende Beziehung

$$\underline{V} (\pm d_1 \underline{H}) = - \underline{P} \left(\frac{\ell}{d} C_m + \frac{2}{5} \frac{\ell \ell_t}{d^2} \right) - 2 \frac{L_0^2}{d^2} (\tilde{C}_{ma} \tilde{\underline{b}} + a_{Tt} \tilde{\underline{B}})^{\text{tan}} , \quad (21)$$

aus der ein Zusammenhang zwischen $\underline{R}$ und $\underline{P}$ abgeleitet wird:

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \frac{1}{2} \underline{P} \left(1 + 2 \frac{\ell}{d} C_m + \frac{4}{5} \frac{\ell \ell_t}{d^2} \right) + \left(\frac{L_0}{d} \right)^2 a_{Tt}^2 \frac{10}{3} \left(\underline{e} - \underline{\Lambda} (\varphi_k) \cdot \underline{e} \right)^{\text{tan}} \\ &+ \sum_{m=-2}^{+2} \left(2 \underline{u} \cdot \underline{p}^{(m)} : \underline{e} \underline{u} \right)^{\text{tan}} \left[\frac{-\frac{1}{2}}{1 + i m \varphi_T} + \alpha_m \frac{L_m}{d} \coth \frac{d}{L_m} \left(1 - (1 + i m \varphi_T) \tilde{C}_{ma} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L_m}{d} \right)^2 \left(\tilde{C}_{ma} (1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt}) + a_{Tt} \right) \right] . \end{aligned} \quad (22)$$

Hieraus berechnet man zunächst $\underline{e} \cdot (\underline{R}(\underline{H}) - \underline{R}(\underline{Q}))$, der Vergleich mit (20) liefert $\underline{e} \cdot \underline{P}$; dann entnimmt man $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{R}$ aus (22), setzt in (18) ein und erhält daraus $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}$. Das Ergebnis kann unter Verwendung der Formeln aus Anhang III (Auswertung

von $(\underline{u} \cdot \underline{\mathcal{P}}^{(m)} \underline{e} \underline{u})^{\tan})$ folgendermaßen geschrieben werden :

(23)

$$(1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{\mathcal{P}} = E_1 \left[(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 + (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 4(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 \right] + E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{e})^2) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \\ + \frac{3 \left(\frac{L_0}{d}\right)^2 a_{Tt}^2}{1 + 3 \frac{L}{d} C_m + \frac{6}{5} \frac{L_T L_t}{d^2}} \left[\frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} (1 + 2(\underline{h} \cdot \underline{e})^2) + \frac{8\varphi_k^2}{1 + 4\varphi_k^2} (1 - (\underline{h} \cdot \underline{e})^2) \right]$$

$$(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{\mathcal{P}} = (\underline{h} \cdot \underline{e}) (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e})) \left[E_1 (1 - 4(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \right] \\ - (\underline{h} \cdot \underline{u}) \left[E_1^{\text{tr}} (1 - 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2^{\text{tr}} (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \right] \\ + \frac{3 \left(\frac{L}{d}\right)^2 a_{Tt}^2}{1 + 3 \frac{L}{d} C_m + \frac{6}{5} \frac{L_T L_t}{d^2}} \left[(\underline{h} \cdot \underline{e}) (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e})) \left(\frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} - \frac{8\varphi_k^2}{1 + 4\varphi_k^2} \right) + \right. \\ \left. + (\underline{h} \cdot \underline{u}) \left(\frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1 + 4\varphi_k^2} \right) \right] \quad (24)$$

wobei sich die reellen Größen E_1 , E_2 und E_1^{tr} , E_2^{tr} als Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion ergeben

(25)

$$E_m + i E_m^{\text{tr}} = \frac{1}{1 + 3 \frac{L}{d} C_m + \frac{6}{5} \frac{L_T L_t}{d^2}} \left[- \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} - i \frac{m \varphi_T}{1 + m^2 \varphi_T^2} \right. \\ - 3 \alpha_m \frac{L_m}{d} \coth \frac{d}{L_m} (1 - \tilde{C}_{ma} (1 + i m \varphi_T)) + 3 \alpha_0 \frac{L_0}{d} \coth \frac{d}{L_0} (1 - \tilde{C}_{ma}) \\ + 3 \alpha_m \left(\frac{L_m}{d}\right)^2 (1 + a_{Tt} (1 + i m \varphi_T)) - 3 \alpha_0 \left(\frac{L_0}{d}\right)^2 (1 + a_{Tt}) \\ - 3 \left(\frac{L_m}{d}\right)^2 [\tilde{C}_{ma} (1 + a_{Tt} (1 + i m \varphi_T)) + a_{Tt}] \\ \left. + 3 \left(\frac{L_0}{d}\right)^2 [\tilde{C}_{ma} (1 + a_{Tt}) + a_{Tt}] \right], \quad m = 1, 2.$$

Die Meßgröße in der Brückenordnung ist $(1 + \delta) \underline{e} \cdot \underline{\mathcal{P}}$ (siehe Anhang IV), nach (23) ist sie also unabhängig von δ .

§12. Diskussion der Lösung

(a) Die hydrodynamische Näherung : $\frac{1}{d} = 0$

Für $\frac{1}{d} = 0$ ist $\coth \frac{d}{L_m} = 1$ und (11.25) reduziert sich auf

$$E_m + i E_m^{tr} = - \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} - i \frac{m \varphi_T}{1 + m^2 \varphi_T^2} ; \quad (1)$$

die Größen E_m, E_m^{tr} sind also nach (3.30) proportional zu den in den Viskositätskoeffizienten $\eta^{(m)} = \eta (1 + \varepsilon_m + i \varepsilon_m^{tr})$ auftretenden Größen $\varepsilon_m, \varepsilon_m^{tr}$:

$$\varepsilon_m + i \varepsilon_m^{tr} = A_{\eta T} (E_m + i E_m^{tr}) . \quad (2)$$

Für die Druckgradienten erhält man aus (9.24)

$$\begin{aligned} (1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P} &= E_1 [(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 + (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 4(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 (\underline{h} \cdot \underline{u})^2] + E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{e})^2) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \\ (\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P} &= (\underline{h} \cdot \underline{e}) (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e})) [E_1 (1 - 4(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)] \\ &\quad - (\underline{h} \cdot \underline{u}) [E_1^{tr} (1 - 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2^{tr} (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)] . \end{aligned} \quad (3)$$

Wenn der allgemeine Ausdruck (3.28) für den Reibungsdrucktensor verwendet wird, ergeben sich die wohlbekannten Formeln ⁴¹⁾²⁷⁾

$$\begin{aligned} (1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P} &= E_0 \cdot 3(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 + E_1 [(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 + (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 4(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 (\underline{h} \cdot \underline{u})^2] \\ &\quad + E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{e})^2) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P} &= (\underline{h} \cdot \underline{e}) (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e})) [E_0 \cdot 3(\underline{h} \cdot \underline{u})^2 + E_1 (1 - 4(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)] \\ &\quad - (\underline{h} \cdot \underline{u}) [E_1^{tr} (1 - 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - E_2^{tr} (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)] , \end{aligned}$$

in denen mit $E_0 = 0$ der obige Ausdruck (3) als Spezialfall enthalten ist.

Zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit wird R aus (11.22) entnommen: $\underline{R} = \frac{1}{2}(\underline{P} - \underline{P}^{(0)}) - \frac{1}{2}\underline{e}$, dabei gilt für

$$\underline{P}^{(0)} \equiv \sum_{m=-2}^{+2} (2\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e}\underline{u})^{\tan} \frac{1}{1+im\eta_T} - \underline{e} \quad (5)$$

im hydrodynamischen Grenzfall ($\frac{1}{d} = 0$) speziell

$\underline{P}^{(0)} = (1+\delta)(\underline{e} \cdot \underline{P}) \underline{e} + ((\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}) \underline{u} \times \underline{e}$. Nach (11.15) läßt sich dann V folgendermaßen schreiben

$$\underline{V} = \frac{1}{2} \underline{e} \left(1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2\right) \left(1 + \delta \underline{e} \cdot \underline{P}\right), \quad (6)$$

es gibt demnach für $\frac{1}{d} = 0$ keine Strömung in $\underline{u} \times \underline{e}$ -Richtung, was aber plausibel ist aufgrund der beiden Forderungen

$\underline{V}(\frac{1}{d}, \underline{H}) = \underline{0}$ und $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{V} = 0$. Für $\delta = 0$ ist V sogar unabhängig vom Magnetfeld, denn es wird dann $\underline{V}(y, \underline{H}) = \underline{V}(y, 0) = \underline{0}$ verlangt; in diesem Fall ist die vom Magnetfeld "induzierte" Strömung lediglich eine Knudsen-Korrektur, die Druckgradienten (4) können also in einfacher Weise berechnet werden (41)27).

Für $\delta = 1$ (konstant halten der Drucke p_A und p_B über die Brücke) jedoch gibt es auch für $\frac{1}{d} = 0$ eine vom Magnetfeld hervorgerufene Strömung, der Druckgradient $\underline{e} \cdot \underline{P}$ ist nur noch halb so groß wie für $\delta = 0$, an der Meßgröße $\underline{e} \cdot \underline{P}^{(0)} = (1 + \delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$ ändert sich aber nichts, was nach der nun folgenden Überlegung verständlich wird. Dazu berechnen wir die totale Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v} = \underline{v}_{iso} + A_{\eta T} \frac{d^2}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \underline{V}$ mit (10.8) und (6) und $\eta = \eta_{iso} (1 + A_{\eta T})$ zu

$\underline{v} \approx - \frac{d^2}{2\eta} \underline{e} \left(\frac{dp}{dz}\right)_0 \left(1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2\right) \left(1 - A_{\eta T} \frac{\delta}{1+\delta} \underline{e} \cdot \underline{P}^{(0)}\right)$,
da aber mit (11.14) $\underline{e} (\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p) = \underline{e} \left(1 + A_{\eta T} \frac{1}{1+\delta} \underline{e} \cdot \underline{P}^{(0)}\right)$ gilt, kann man v auch durch den gesamten in e-Richtung wirkenden Druckgradienten ausdrücken:

$$\underline{v} \approx - \frac{d^2}{2\eta_{eff}} \left(1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2\right) \underline{e} (\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p), \quad \eta_{eff} = \eta \left(1 + A_{\eta T} \underline{e} \cdot \underline{P}^{(0)}\right). \quad (7)$$

Die Meßgröße in der Brückenordnung (siehe Anhang IV) ist die relative Änderung der Viskosität im Magnetfeld $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\eta_{eff} - \eta}{\eta}$,

diese kann aber nicht vom speziellen Meßverfahren, dh. vom Wert von δ , abhängen. Da nach (7) der Zusammenhang

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = A_{\eta_T} (1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P} \quad (8)$$

gilt, ist jetzt verständlich geworden, daß $(1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$ unabhängig von δ ist.

Durch geeignete Wahl der Richtungen des Magnetfelds können die Größen E_0 , E_1 , E_2 , E_1^{tr} und E_2^{tr} gemessen werden ⁴¹⁾; für die untersuchten diamagnetischen Gase ergab sich dabei ⁹⁾¹⁰⁾, daß $E_0 \approx 0$ ist (mit Ausnahme von NH_3), woraus sich die Dominanz des Beitrags der Tensorpolarisation zum SBE der Viskosität ergibt. Die folgende Tabelle 5 enthält eine Zusammenstellung der bei verschiedenen Magnetfeldrichtungen auftretenden Kombinationen der Viskositätskoeffizienten (siehe auch ⁴¹⁾). Der ebenfalls angegebene Zusammenhang zwischen den Druckgradienten und den E_m , E_m^{tr} gilt nach (11.23,24) auch noch für die in $\frac{1}{d}$ lineare Näherung, wobei natürlich E_m , E_m^{tr} aus (11.25) bis zu Gliedern linear in $\frac{1}{d}$ zu berechnen sind.

(b) Die in $\frac{1}{d}$ lineare Korrektur an der hydrodynamischen Näherung.

Nun sollen die in $\frac{1}{d}$ linearen Korrekturen an E_m , E_m^{tr} berücksichtigt werden; dazu kann wieder $\coth \frac{d}{L_m} = 1$ gesetzt werden, dann ist mit α_m aus (11.7) und mit $\tilde{C}_{am} = -\tilde{C}_{ma}$:

$$\begin{aligned} \alpha_m \frac{L_m}{d} \coth \frac{d}{L_m} (1 - (1 + i\varphi_T) \tilde{C}_{ma}) &\approx \frac{L_m}{d} \frac{\left(\frac{1}{1 + i\varphi_T} - \tilde{C}_{ma} \right)}{1 + \tilde{C}_a \sqrt{\frac{1 + i\varphi_T}{1 + i\varphi_K}}} (1 - (1 + i\varphi_T) \tilde{C}_{ma}) \\ &= \frac{L_0}{d} \frac{\left(\frac{1}{1 + i\varphi_T} - \tilde{C}_{ma} \right)^2}{\sqrt{\frac{1 + i\varphi_K}{1 + i\varphi_T}} + \tilde{C}_a} \quad , \text{ damit folgt aus (11.25)} \end{aligned}$$

$$E_m + i E_m^{\text{tr}} \approx \frac{-i\varphi_T}{1 + i\varphi_T} \cdot \frac{1}{1 + 3\frac{\ell}{d} C_m} - 3 \frac{L_0}{d} \left[\frac{\left(\frac{1}{1 + i\varphi_T} - \tilde{C}_{ma} \right)^2}{\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1 + i\varphi_K}{1 + i\varphi_T}}} - \frac{(1 - \tilde{C}_{ma})^2}{\tilde{C}_a + 1} \right] \quad (9)$$

Die E_m , E_m^{tr} bestimmen nach der auch jetzt noch geltenden Be-

Tabelle 5 : Meßgrößen bei der Strömung im rechteckigen Kanal für verschiedene Richtungen des Magnetfelds , berechnet aus (4).

<u>H</u> -Richtung				Longitudinaleffekt			Transversaleffekt		
$\underline{h} \cdot \underline{e}$	$\underline{h} \cdot \underline{u}$	$\underline{h} \cdot \underline{u} \cdot \underline{e}$	$\underline{h} \cdot \underline{u} \cdot \underline{e}$	$(1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$	$\Delta \eta = \eta A_{\eta T}$ $\cdot (1+\delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$	Ref.	$(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}$	$\eta A_{\eta T}$ $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}$	Ref.
± 1	0	0	0	E_1	$\eta_3 - \eta$	42c	0	0	--
0	± 1	0	0	E_1	$\eta_3 - \eta$	42c	$\pm E_1^{tr}$	$\pm \eta_5$	42 35a 9
0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{2}(\eta_3 + 2\eta_2 - \eta_1 - 2\eta)$	--	$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} E_2^{tr}$	$\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta_4$	42d 42c 9
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{2}(\eta_3 + 2\eta_2 - \eta_1 - 2\eta)$	--	$\pm \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$	$\pm \frac{1}{2}(\eta_3 + \eta_1 - 2\eta_2)$	42a
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{3}{4}E_0 + \frac{1}{4}E_2$	$\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta)$	$\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta)$	42c 10	$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} E_2^{tr}$	$\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta_4$	42d 42c 9
0	0	± 1	E_2	E_2	$2\eta_2 - \eta_1 - \eta$	42c 10	0	0	--
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{16}E_0 + \frac{1}{4}E_1 + \frac{9}{16}E_2$	$-\frac{3}{8}\eta_1 + \frac{9}{8}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_3 - \eta$	$-\frac{3}{8}\eta_1 + \frac{9}{8}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_3 - \eta$	10	$\frac{3}{8\sqrt{2}}(E_0 - E_2)$ $-\frac{1}{4}E_1^{tr} + \frac{3}{8}E_2^{tr}$	$\frac{3}{4\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2)$ $-\frac{1}{4}(\frac{3}{2}\eta_4 + \eta_5)$	--

ziehung (3) die Meßgrößen $(1 + \delta) \underline{e} \cdot \underline{P}$ und $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}$, d.h.

statt $A_{\eta T} \frac{(-)m^2 \varphi_T^2}{1+m^2 \varphi_T^2}$ und $A_{\eta T} \frac{(-)m \varphi_T}{1+m^2 \varphi_T^2}$ mißt man jetzt $A_{\eta T} E_m$ und $A_{\eta T} E_m^{tr}$ aus (9). Um schnell den Trend der Korrekturen zu erkennen, wird der einfache, aber praktisch nicht verwirklichte Fall betrachtet, daß $\omega_T = \omega_K$ ist, also auch $\varphi_T = \varphi_K$. In dieser

Näherung gilt

$$A_{\eta T} (E_m + i E_m^{tr}) \approx -A_{\eta T}^i \frac{i m \varphi_T^i}{1 + i m \varphi_T^i} \quad (10)$$

mit

$$A_{\eta T}^i = \frac{(\omega_{\eta T}^i)^2}{\omega_{\eta}^i \omega_T^i}, \quad \varphi_T^i = \frac{\omega_H}{\omega_T^i} \quad (11)$$

und den effektiven Relaxationskonstanten

$$\begin{aligned} \omega_{\eta}^i &= \omega_{\eta} \left(1 + 3 \frac{\ell}{d} C_m\right), \quad \omega_T^i = \omega_T \left(1 + 3 \frac{L_0}{d} \frac{1}{1 + \tilde{C}_a}\right) \\ \omega_{\eta T}^i &= \omega_{\eta T} \left(1 + 3 \frac{L_0}{d} \frac{\tilde{C}_{ma}}{1 + \tilde{C}_a}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Da im verdünnten Gas neben den Stößen der Moleküle untereinander (was charakterisiert wird durch die Relaxationskonstanten ω_{η} , ω_T , $\omega_{\eta T}$...) auch die Stöße mit der Wand eine Rolle spielen, müssen ω_{η} , ω_T , $\omega_{\eta T}$ ersetzt werden durch die effektiven Relaxationskonstanten ω_{η}^i , ω_T^i , $\omega_{\eta T}^i$, die in den Oberflächenparametern C_m , $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$ die Beiträge der Gas-Wand-Wechselwirkung enthalten. Beide Beiträge haben verschiedene Druckabhängigkeit, wie man beispielsweise an ω_{η}^i erkennt:

$\omega_{\eta}^i = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{8 k T_0}{\pi M}} \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{d} C_m \right)$, der von den Gas-Gas-Stößen herkommende Anteil ist proportional zum Druck, während der Anteil der Gas-Wand-Stöße druckunabhängig ist.

Die zur Stärke H des Magnetfelds proportionale Variable ist jetzt φ_T^i statt φ_T

$$\varphi_T^i = \varphi_T \left(1 + 3 \frac{L_0}{d} \frac{1}{1 + \tilde{C}_a}\right) \quad (13)$$

die H/p_0 -Achse wird somit um den Faktor $1 + 3 \frac{L_0}{d} \frac{1}{1 + \tilde{C}_a}$ gestreckt. Die Größe des Effekts wird um den Faktor

$1 + 3 \frac{\ell}{d} C_m + 3 \frac{L_0}{d} \frac{1 - 2 \tilde{C}_{ma}}{1 + \tilde{C}_a}$ verringert, da für $A_{\eta T}^i$ gilt

$$A_{\eta T}^i = A_{\eta T} / \left(1 + 3 \frac{\ell}{d} C_m + 3 \frac{L_0}{d} \frac{1 - 2 \tilde{C}_{ma}}{1 + \tilde{C}_a}\right) \quad (14)$$

Genau von dieser Art sind auch die experimentell angebrachten Knudsen-Korrekturen; so beschreiben Hulsman e.a. ⁹⁾¹⁰⁾ die Reduktion der Höhe des Effekts durch den Faktor $1 + n_\beta \frac{1}{2} \frac{1}{d}$ und die Dehnung der H/p_o -Achse durch den Faktor $1 + n_\gamma \frac{1}{2} \frac{1}{d}$ und geben Werte für n_β und n_γ an. Für $\omega_T = \omega_K$ gelten also die Beziehungen

$$\frac{1}{6} n_\beta = C_m + \frac{L_o}{\ell} \cdot \frac{1 - 2\tilde{C}_{ma}}{1 + \tilde{C}_a}, \quad \frac{1}{6} n_\gamma = \frac{L_o}{\ell} \frac{1}{1 + \tilde{C}_a} \quad , \quad (15)$$

nimmt man C_m als bekannt an, so ergeben sich hieraus Werte für die Parameter $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$.

Für große Werte von $\tilde{C}_a$ wird n_γ sehr klein und n_β ist allein durch C_m bestimmt, dann spielen die Randeffekte der Tensorpolarisation keine Rolle (siehe auch §11.(a)), die H/p_o -Achse bleibt unverändert. Dagegen sind für $\tilde{C}_a = 0$ die Randeffekte der Tensorpolarisation am stärksten ausgeprägt, und die Dehnung der H/p_o -Achse ist maximal ($n_\gamma = 6 L_o/l$). Nach (10), dh. für $\omega_T = \omega_K$, sind die anzubringenden Korrekturen gleich für die Transversal- und Longitudinaleffekte; bei den vorliegenden experimentellen Daten ⁹⁾¹⁰⁾ trifft das jedoch nicht zu, es gilt ja auch $\omega_T \neq \omega_K$: Hulsman e.a. geben verschiedene Werte für $n_\beta^{tr}, n_\gamma^{tr}$ ⁹⁾ und $n_\beta^{long}, n_\gamma^{long}$ ¹⁰⁾ an.

Die Anwendung magnetfeldunabhängiger Korrekturen ist nach der vorliegenden Theorie genau genommen nur für $\omega_T = \omega_K$ möglich, für $\omega_T \neq \omega_K$ hängt das Ausmaß der Korrektur vom φ_T -Wert ab; das spielt aber in der Praxis keine Rolle (siehe §13.). Hier sollen näherungsweise die Verschiebungen von Lage und Höhe des halben Sättigungswerts der Longitudinaleffekte bzw. des Maximums der Transversaleffekte angegeben werden. Der Sättigungswert von E_m ($m = 1, 2$) ist ($K = \omega_T/\omega_K$)

$$E_m^\infty = - \left[1 - 3 \frac{\ell}{d} \left[C_m + \frac{L_o}{\ell} \left(\frac{(1 - \tilde{C}_{ma})^2}{1 + \tilde{C}_a} - \frac{\tilde{C}_{ma}^2}{\sqrt{K + \tilde{C}_a}} \right) \right] \right] \quad , \quad (16)$$

und der halbe Sättigungswert wird erreicht für

$$(m\varphi_T)_{1/2} \approx 1 + 3 \frac{L_o}{d} \left[\frac{(1 - \tilde{C}_{ma})^2}{1 + \tilde{C}_a} + \frac{\tilde{C}_{ma}^2}{\sqrt{K + \tilde{C}_a}} + \operatorname{Re} \frac{i(1 - 2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1 - \tilde{C}_{ma})}{\sqrt{\frac{1 + iK}{1 + i}} + \tilde{C}_a} \right] \quad (17)$$

Das Maximum von $(-E_m^{tr})$ ist gegeben durch

$$(-E_m^{tr})_{\max} \approx \frac{1}{2} \left[1 - 3 \frac{\ell}{d} \left[C_m + \frac{L_0}{\ell} \operatorname{Im} \frac{i(1-2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1-\tilde{C}_{ma})}{\sqrt{\frac{1+iK}{1+i}} + \tilde{C}_a} \right] \right] \quad (18)$$

und liegt bei

$$(m\varphi_r)_{\max} \approx 1 + 3 \frac{L_0}{d} \operatorname{Im} \left[\frac{i + 2\tilde{C}_{ma} - 1}{\sqrt{\frac{1+iK}{1+i}} + \tilde{C}_a} - \frac{1-K}{4} \sqrt{\frac{1+i}{1+iK}} \frac{i(1-2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1-\tilde{C}_{ma})}{\left(\sqrt{\frac{1+iK}{1+i}} + \tilde{C}_a\right)^2} \right] \quad (19)$$

Durch Vergleich mit den experimentell angebrachten Knudsen-Korrekturen ⁹⁾¹⁰⁾ ergeben sich hieraus Werte für die Oberflächenparameter.

Nun sollen noch einige Bemerkungen zur Geschwindigkeit $\underline{V}$ gemacht werden; am Rand hat sie nach (11.21), mit $\underline{b}$ und $\underline{B}$ aus (11.6,8), den Wert

$$\underline{V}(\pm d, H) = -\frac{\ell}{d} C_m \underline{P} + \frac{L_0}{d} (a_{rt} + \tilde{C}_{ma}) \sum_{m=-2}^{+2} (2\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{e} \underline{u})^{\tan \frac{1}{\sqrt{\frac{1+iK}{1+i}} + \tilde{C}_a}} \quad (20)$$

der durch mechanische ($\sim C_m$), thermische ($\sim a_{rt}$, herrührend vom Kagan-Vektor in $\underline{q}^{tr}$) und thermomagnetische Gleitung ($\sim \tilde{C}_{ma}$) bestimmt ist. Im Gasinneren ($d - y \ll L_0$) sind die zu α_m proportionalen Terme abgeklungen, nach (11.15) ist dann

$$\underline{V} \approx -\underline{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 (\underline{e} + \underline{P}^{(0)} - \underline{P}) \quad ; \quad (21)$$

und daraus folgt mit $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{R}$ aus (11.18) speziell

$$(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{V} \approx \frac{1}{6} (\underline{u} \times \underline{e}) \cdot (\underline{P}^{(0)} - \underline{P}) (1 - 3 \left(\frac{y}{d} \right)^2) \quad . \quad (22)$$

Im hydrodynamischen Grenzfall ($\frac{1}{d} = 0$) war $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P} = (\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{P}^{(0)}$, folglich ist die Strömungsgeschwindigkeit in $\underline{u} \times \underline{e}$ -Richtung im ganzen Raum ($-d \leq y \leq d$) proportional zu $1/d$.

Zum Vergleich mit dem Experiment in §13 wird nur die in $1/d$ lineare Näherung verwendet.

Nun sollen noch einige Bemerkungen zum Einfluß der Wärmeströme auf die Tensorpolarisation, die Geschwindigkeit und den Druckgradienten im Magnetfeld gemacht werden. Der translatorische Wärmestrom bestimmt in der Randbedingung (9.10) für $\underline{v}$ die thermische Gleitung und führt in $\underline{v}_{iso}$ nach (10.8) zu einem konstanten Beitrag $\sim 1\gamma l_t/d^2$, und in $\underline{v}$ aus (11.15), über den nach (9.19) angekoppelten Kaganvektor $\underline{B}$, zu Gliedern $\sim a_{Tt} L_o/d$. Andererseits ist der Strom der Tensorpolarisation nach (9.21) auch durch die Wärmeströme bestimmt, was über den Term $C_a \underline{u} \cdot \underline{b}$ in der Randbedingung für $\underline{a}$ zu einem Beitrag $\sim a_{Tt} L_o/d$ in $\underline{a}_m$ (siehe (11.7)) führt. Im Drucktensor kommt nach (9.18) $\underline{v}^{\text{tr}}_q$ vor, und der in $\underline{q}^{\text{tr}}$ enthaltene Kaganvektor tritt in der Differentialgleichung (9.14) für $\underline{v}$ als Inhomogenität $\sim (\underline{v} \cdot \underline{v} \cdot \underline{B} - \underline{v} \cdot \underline{v} \underline{B})$ in Erscheinung. Auf diese Weise kommen weitere Beiträge $\sim a_{Tt} L_o/d$ zu $\underline{v}$ zustande; die mittlere Geschwindigkeit $\underline{v}$ enthält nach (11.16) a_{Tt} als $a_{Tt} (L_o/d)^2$ (und mit höheren Potenzen von L_o/d). Zu den Meßgrößen $(1 + \delta) \underline{e} \cdot \underline{p}$ und $(\underline{u} \times \underline{e}) \cdot \underline{p}$ tragen die Wärmeströme nach (11.23 - 25) höchstens in quadratischer Näherung in der freien Weglänge bei, z.B. in den Termen $1\gamma l_t/d^2$ und $a_{Tt} (L_o/d)^2$.

Werden also die Wärmeströme konsequent vernachlässigt (dadurch, daß man formal $a_{Tt} = 0$, $l_t = 0$ setzt), so sind die entstehenden Fehler von der Ordnung $1/d$ in der Tensorpolarisation $\underline{a}$ und in der "anisotropen" Geschwindigkeit $\underline{v}$, und von der Ordnung $(1/d)^2$ in der "isotropen" Geschwindigkeit $\underline{v}_{iso}$ und im magnetfeldabhängigen Druckgradienten $\underline{p}$.

§13. Vergleich mit dem Experiment

Aus dem Vergleich der in linearer Näherung in $1/d$ gültigen Ausdrücke (12.9) für E_m , E_m^{tr} mit den von Hulsman e.a. ^{9) 10)} gemessenen Knudsen-Korrekturen am SBE der Viskosität sollen die Oberflächenkoeffizienten C_m , $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$ bestimmt werden.

Die experimentellen Bedingungen und Ergebnisse sind in Tabelle 6 zusammengefaßt. Die verwendeten rechteckigen Kapillaren sind demnach sehr flach, und die Bedingung $D_z \gg D_x \gg D_y$ (Bezeichnungen wie in Fig.1., p. 53) ist gut erfüllt, sodaß die Ergebnisse der Rechnung für die Strömung eines Gases zwischen unendlich ausgedehnten, parallelen Platten (vom Abstand $D_y = 2 d$) mit den experimentellen Resultaten verglichen werden können.

Aus dem angegebenen Druckbereich und der Kapillarendicke $2 d$ wurden die größten und kleinsten vorkommenden Knudsenzahlen $1/d$ berechnet (l ist definiert in (4.7), Zahlenwerte findet man in Tabelle 3). Das maximal verfügbare Magnetfeld H_{max} und der minimale Druck bestimmen nach (4.8) und Tabelle 4 den größten erreichten φ_T - Wert. Aufgrund dieser Gegebenheiten werden beim Vergleich von E_m , E_m^{tr} aus (12.9) mit dem Experiment nur Knudsenzahlen im Bereich $0.005 \leq 1/d \leq 0.05$ und φ_T - Werte ≤ 10 in Betracht gezogen.

Der Knudsen-Parameter n_α beschreibt die Erhöhung des Massenstroms ohne Magnetfeld durch Gleitung mit dem Faktor $1 + n_\alpha l/(2 d)$, ist also proportional zum mechanischen Gleitkoeffizienten C_m (vergleiche (10.8)) :

$$\frac{1}{6} n_\alpha \hat{=} C_m . \quad (1)$$

Außerdem werden mit zunehmender Knudsenzahl $1/d$ die im Magnetfeld beobachteten Druckunterschiede kleiner, und das Maximum bzw. der halbe Sättigungswert wird erst bei höheren H/p_0 Werten erreicht; das wird durch die Parameter n_β^{tr} , n_β^{long} und n_γ^{tr} , n_γ^{long} quantitativ ausgedrückt gemäß

$$(E_m)_{\text{exp}} = - \frac{(m\psi_{\text{long}})^2}{1+(m\psi_{\text{long}})^2} \frac{1}{1+n_{\beta}^{\text{long}} \frac{\ell}{2d}}, \quad \psi_{\text{long}} = \frac{\varphi_T}{1+n_y^{\text{long}} \frac{\ell}{2d}} \quad (2)$$

$$(E_m)_{\text{exp}}^{\text{tr}} = - \frac{m\psi_{\text{tr}}}{1+(m\psi_{\text{tr}})^2} \frac{1}{1+n_{\beta}^{\text{tr}} \frac{\ell}{2d}}, \quad \psi_{\text{tr}} = \frac{\varphi_T}{1+n_y^{\text{tr}} \frac{\ell}{2d}}.$$

Nach Tabelle 6 werden i.a. verschiedene Zahlenwerte für die Knudsen-Korrekturen an den Transversal - ⁹⁾ und den Longitudinaleffekten ¹⁰⁾ angegeben.

Ein erster Anhaltspunkt für die Größe von C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ ergibt sich nach (12.16, 18) aus der Reduktion des Sättigungswerts bzw. Maximums

$$\frac{1}{2} n_{\beta}^{\text{long}} \leftrightarrow N_{\infty} \equiv 3C_m + 3 \frac{L_0}{\ell} \left(\frac{(1-\tilde{C}_{ma})^2}{1+\tilde{C}_a} - \frac{\tilde{C}_{ma}^2}{\sqrt{k} + \tilde{C}_a} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} n_{\beta}^{\text{tr}} \leftrightarrow N_{\text{max}} \equiv 3C_m + 3 \frac{L_0}{\ell} \operatorname{Im} \frac{i(1-2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1-\tilde{C}_{ma})}{\sqrt{\frac{1+ik}{1+i}} + \tilde{C}_a} \quad (4)$$

und aus der Verschiebung der Lage des halben Sättigungswerts bzw. des Maximums nach (12.17, 19)

$$\frac{1}{2} n_y^{\text{long}} \leftrightarrow n_{1/2} \equiv 3 \frac{L_0}{\ell} \left[\frac{(1-\tilde{C}_{ma})^2}{1+\tilde{C}_a} + \frac{\tilde{C}_{ma}^2}{\sqrt{k} + \tilde{C}_a} + \operatorname{Re} \frac{i(1-2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1-\tilde{C}_{ma})}{\sqrt{\frac{1+ik}{1+i}} + \tilde{C}_a} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} n_y^{\text{tr}} \leftrightarrow n_{\text{max}} \equiv 3 \frac{L_0}{\ell} \operatorname{Im} \left[\frac{i+2\tilde{C}_{ma}-1}{\sqrt{\frac{1+ik}{1+i}} + \tilde{C}_a} - \frac{1-k}{4} \sqrt{\frac{1+i}{1+ik}} \frac{i(1-2\tilde{C}_{ma}) + 2\tilde{C}_{ma}(1-\tilde{C}_{ma})}{\left(\sqrt{\frac{1+ik}{1+i}} + \tilde{C}_a\right)^2} \right] \quad (6)$$

Die Größen N_{∞} , N_{max} , $n_{1/2}$, n_{max} hängen von C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ und vom Verhältnis $k = \omega_T / \omega_K$ ab, das nach (3.20) und (4.7) auch in L_0/l vorkommt

$$\frac{L_0}{\ell} = \frac{5}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_T}{\omega_T} \sqrt{\frac{\omega_T}{\omega_K}} \quad (7)$$

Tabelle 6 : Experimentelle Bedingungen und Ergebnisse für die Messung der Knudsen -
 Korrekturen am SBE der Viskosität nach Hulsman e.a. ⁹⁾ ¹⁰⁾ .

Naße der Kapillaren (mm)	D _y	D _x	D _z	Druckbereich		Knudsenzahlen 1/d nach (4.7) (T ₀ = 293 K)		Größter φ _T - Wert	experimentelle Knudsen - Korrekturen			K und L ₀ /l nach Tabelle 4			
				p ₀ (torr) min.	max.	max.	min.		min.	max.	η _α	η _β	η _γ		$K = \frac{\omega_T}{\omega_K}$
1. Kapillare: 0.50 15.0 35.0				4.0	51.0	0.091	0.007	H _{max} = 27.0 kOe 14.10		6.0	10.0	12.0	0.16	2.68	HD
				3.5	13.8	0.047	0.012		1.26	6.0	10.0	3.0	0.56	0.78	CH ₄
				3.7	13.3	0.053	0.015		1.39	6.0	10.0	2.0	0.64	0.71	CO
				3.5	15.8	0.057	0.013		2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂
				3.5	15.8	0.057	0.013		2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂
2. Kapillare: 0.50 10.0 100.0				3.5	15.8	0.057	0.013	2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂	
				3.7	13.3	0.053	0.015	1.39	6.0	10.0	2.0	0.64	0.71	CO	
				3.5	15.8	0.057	0.013	2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂	
				3.5	15.8	0.057	0.013	2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂	
				3.5	15.8	0.057	0.013	2.11	6.0	10.0	2.0	0.47	0.85	N ₂	
Longitudinaleffekte nach ¹⁰⁾ : η ₁ , η ₂ , η ₃	0.75	15.0	104.0					H _{max} = 22.6 kOe 15.90		6.0	6.0	14.0	0.16	2.68	HD
				3.4	16.9	0.071	0.014		1.68	6.0	9.0	3.0	0.56	0.78	CH ₄
				2.2	13.7	0.050	0.008		2.39	6.0	10.0	2.0	0.64	0.71	CO
				1.8	7.6	0.073	0.017		2.95	6.0	12.0	4.0	0.47	0.85	N ₂
				2.1	11.2	0.063	0.012		2.95	6.0	12.0	4.0	0.47	0.85	N ₂

Die mit Hilfe von Tabelle 4 berechneten Zahlenwerte für K und $L_0/1$ sind ebenfalls in Tabelle 6 angegeben. Für $K = 1$ gilt nach (12.15) speziell

$$\begin{aligned} N_\infty = N_{\max} &= 3C_m + 3 \frac{L_0}{l} \frac{1 - 2\tilde{C}_{ma}}{1 + \tilde{C}_a} \\ n_{1/2} = n_{\max} &= 3 \frac{L_0}{l} \frac{1}{1 + \tilde{C}_a} \end{aligned} \quad (8)$$

Die Knudsen-Parameter N_∞ , $N_{\max}$, $n_{1/2}$ und $n_{\max}$ wurden in Fig. 3. für HD als Funktion von $\tilde{C}_{ma}$ gezeichnet für einige Werte von $\tilde{C}_a$ und für $C_m = 1.0$; die Abhängigkeit von C_m ist nach (3) - (6) einfach: $n_{1/2}$ und $n_{\max}$ sind unabhängig von C_m , N_∞ und $N_{\max}$ nehmen linear mit C_m zu (in der Zeichnung wurde daher nur ein C_m - Wert verwendet). An Fig. 3. erkennt man, daß N_∞ und $N_{\max}$ mit zunehmendem $\tilde{C}_{ma}$ und $\tilde{C}_a$ abnehmen (zumindest für den aufgetragenen $\tilde{C}_{ma}$ - Bereich), während $n_{1/2}$ und $n_{\max}$ mit wachsendem $\tilde{C}_{ma}$ zunehmen und mit wachsendem $\tilde{C}_a$ kleiner werden. Aus solchen Figuren wurden durch Vergleich mit den experimentellen Größen n_β , n_β^{tr} , n_γ , n_γ^{tr} einige passende Werte für C_m , $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$ entnommen; diese sind zusammen mit den zugehörigen Werten von $N_{\max}$, N_∞ , $n_{\max}$ und $n_{1/2}$ in Tabelle 7 angegeben.

In Fig. 4. sind die Verhältnisse $N_\infty/N_{\max}$ und $n_{1/2}/n_{\max}$ für die Gase HD und N_2 als Funktion von $\tilde{C}_{ma}$ aufgetragen. Für kleine K (HD: $K = 0.16$) ändern sich $N_\infty/N_{\max}$ und $n_{1/2}/n_{\max}$ noch stark mit $\tilde{C}_{ma}$ und $\tilde{C}_a$, aber schon für $K = 0.47$ (dh. N_2) sind sie nur noch relativ wenig von 1 (dem Wert für $K = 1$) verschieden. Bei den vier Gasen HD, CH_4 , CO und N_2 gilt stets $N_\infty < N_{\max}$ und $n_{1/2} > n_{\max}$.

Die experimentell gefundenen Werte von $1/2 n_\gamma^{\text{long}} = 2.0$ und $1/2 n_\gamma^{\text{tr}} = 1.0$ für N_2 sind nach der vorliegenden Theorie nicht zu verstehen, vielmehr müßte $n_\gamma^{\text{long}} \approx n_\gamma^{\text{tr}}$ sein.

Da die Knudsen-Korrekturen nach (12.9) nicht unabhängig vom φ_T - Wert sind, werden noch die relativen, quadratischen Abweichungen zwischen theoretischen und experimentellen Kurven (nach (12.9) und (2)) an Z φ_T - Stützstellen $\psi_1, \dots, \psi_2$ untersucht:

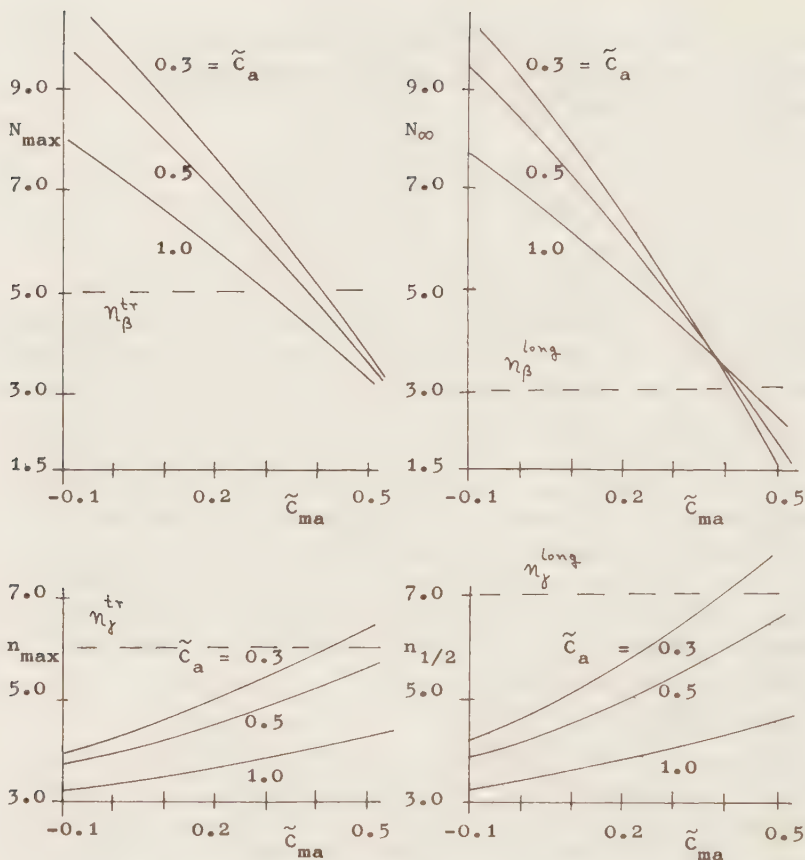


Fig.3. Knudsen-Parameter für HD ; berechnet aus (3) - (6) als Funktion von $\tilde{C}_{ma}$ für drei $\tilde{C}_a$ -Werte und $C_m = 1.0$. Die experimentellen Werte sind gestrichelt eingezeichnet.

$$Q_{tr} = \left[\frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \left(\frac{E_m^{tr} - (E_m^{tr})_{exp}}{(E_m^{tr})_{exp}} \right)^2_{m\varphi_i = \gamma_i} \right]^{1/2}, \quad \text{analog für } Q_{long}. \quad (9)$$

In **Fig.5.** ist am Beispiel von CH_4 (für $1/d = 0.025$, $C_m = 1.0$)

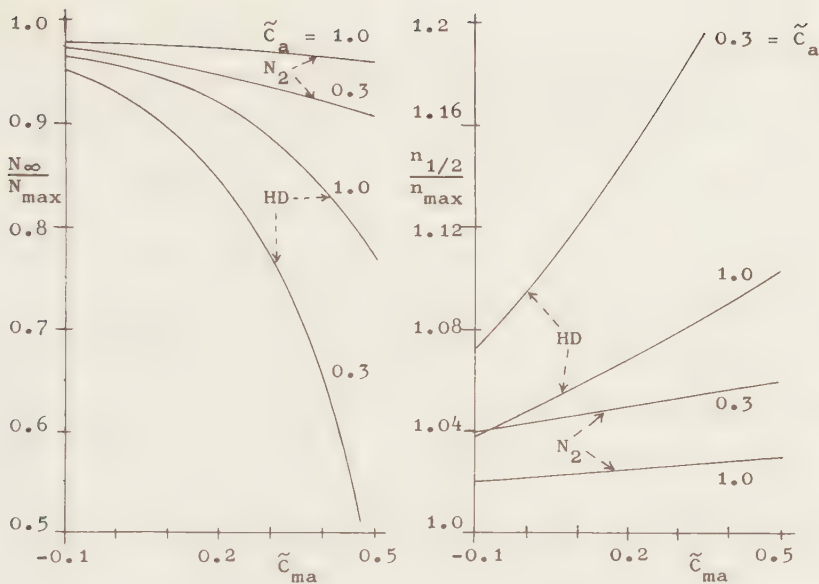


Fig. 4. Verhältnis der longitudinalen und transversalen Knudsen-Parameter für HD und N_2 ; berechnet aus (3) - (6) als Funktion von $\tilde{C}_{ma}$ für zwei $\tilde{C}_a$ -Werte und $C_m = 1.0$.

gezeigt, wie Q_{tr} von $\tilde{C}_{ma}$ und $\tilde{C}_a$ abhängt; zur Berechnung wurden die in Tabelle 7 angegebenen 30 φ_T -Stützstellen verwendet. Wenn Q_{tr} (bezw. Q_{long}) bei Vorgabe von $1/d$ und C_m (und festen Stützstellen) minimalisiert wird durch Variation von $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$, dann sind die so erhaltenen "besten" $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ -Werte noch von $1/d$ abhängig; beispielsweise ist bei CH_4 für $C_m = 1.0$ und den φ_T -Stützstellen aus Tabelle 7 bei den Knudsenzahlen

$$\begin{array}{l} 1/d = \\ 0.005 \\ 0.025 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q_{tr} = \\ 0.034 \% \\ 0.113 \% \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \tilde{C}_a = \\ 0.368 \\ 0.559 \end{array}, \quad \begin{array}{l} \tilde{C}_{ma} = \\ -0.055 \\ -0.048 \end{array} \quad (10)$$

Bei festem $1/d$ kann also die theoretische sehr genau an die experimentelle Kurve angepaßt werden; diese große Genauigkeit ist jedoch praktisch nicht zu verwerten, da die experimentellen

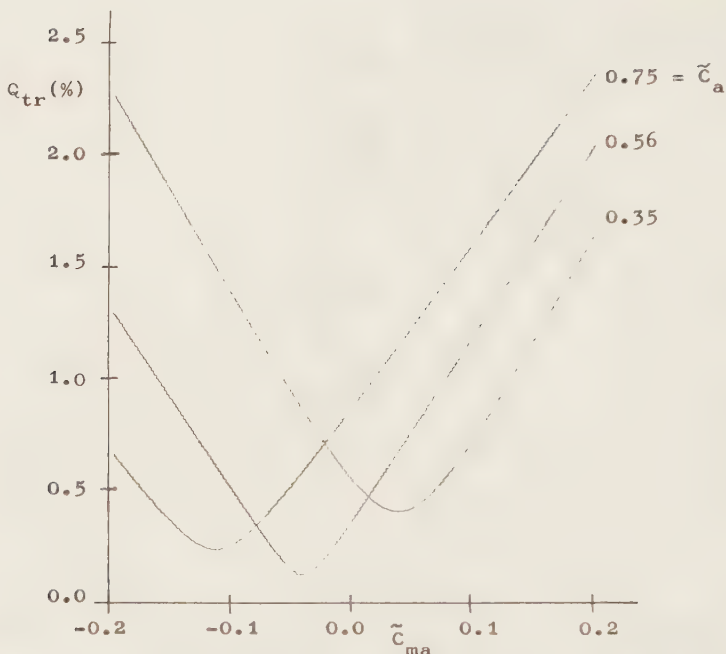


Fig. 5. Relative Abweichung Q_{tr} zwischen theoretischer und experimenteller Kurve für den Transversaleffekt von CH_4 , berechnet nach (9) mit den Stützstellen aus Tabelle 7 und $1/d = 0.025$, $C_m = 1.0$; vergleiche dazu auch (10).

Knudsen-Parameter n_{β}^{tr} , n_{β}^{long} , n_{γ}^{tr} , n_{γ}^{long} nicht genau genug bekannt sind. Daher soll hier ein Satz von Oberflächenkoeffizienten C_m , $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$ bestimmt werden, mit dem die experimentellen Ergebnisse (in der Form (2)) durch E_m und E_m^{tr} aus (12.9) für einen größeren Bereich von Knudsenzahlen (nämlich $0.005 \leq 1/d \leq 0.05$) halbwegs gut beschrieben werden können. Die Abweichungen Q_{tr} und Q_{long} sind dann zwar nicht minimal, aber auch nicht zu groß. In Tabelle 7 sind für die aus dem Vergleich von N_{∞} , N_{max} , $n_{1/2}$, n_{max} mit n_{β}^{long} , n_{β}^{tr} , n_{γ}^{long} , n_{γ}^{tr} erhaltenen Koeffizienten C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$

Tabelle 7 : Einige Werte für die Oberflächenkoeffizienten C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ und die dazugehörigen Knudsen-Korrekturen N_{max} , n_{max} , N_∞ , $n_{1/2}$. Die relativen Abweichungen Q_{tr} und Q_{long} wurden mit den 30 angegebenen Stützstellen berechnet.

	C_m	$\tilde{C}_a$	$\tilde{C}_{ma}$	N_{max}	n_{max}	$Q_{tr} \text{ (%)}$		N_∞	$n_{1/2}$	$Q_{long} \text{ (%)}$	
						$1/d =$				$1/d =$	
						0.025	0.05			0.025	0.05
HD	1.0	0.30	0.40	5.16	5.83	2.86	8.81	3.39	7.05	4.33	21.15
		0.30	0.50	3.81	6.35	5.96	13.01	1.68	7.86	1.53	14.21
		0.40	0.50	3.69	5.93	5.57	11.82	1.92	7.14	1.23	10.09
		0.40	0.40	4.94	5.48	2.32	6.98	3.46	6.46	2.92	16.72
CH ₄	1.0	0.40	-0.05	4.96	1.44	0.71	3.39	4.84	1.47	2.01	7.02
		0.50	0.05	4.52	1.41	0.61	1.04	4.40	1.44	0.66	3.93
		0.60	0.00	4.56	1.31	0.47	0.92	4.46	1.33	0.57	3.60
CO	1.2	0.90	-0.10	4.99	1.02	0.69	2.83	4.94	1.03	1.01	4.37
		1.00	-0.05	4.82	0.99	0.23	1.75	4.77	1.00	0.41	2.98
		1.10	0.00	4.71	1.00	0.33	0.84	4.67	1.01	0.17	1.73
N ₂	1.2	0.30	0.00	5.74	1.61	2.94	7.90	5.56	1.68	0.47	4.29
		1.00	0.00	4.95	1.14	0.67	2.74	4.88	1.17	3.88	4.63
		1.00	-0.10	5.20	1.11	1.27	4.14	5.13	1.13	3.26	3.20
		1.10	-0.10	5.12	1.06	1.04	3.61	5.06	1.08	3.63	4.06
$m_{\varphi_T} =$ Stütz- stellen für Q_{tr} , Q_{long}		0.13	0.16	0.20	0.25	0.32	0.40	0.50	0.60	0.63	0.68
		0.72	0.77	0.83	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.17	1.25
		1.35	1.45	1.55	1.65	1.75	2.00	2.30	2.70	3.10	3.50

Tabelle 8 : Ausgewählte Werte für die Oberflächenkoeffizienten C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ und C_a , C_{ma} (nach (11.2) berechnet); s_t ist das Vorzeichen von $\omega_{\eta T}$ und ω_{kt} .

	$\sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_T}}$	$\sqrt{2} \frac{ \omega_{\eta T} }{\omega_T}$	$\tilde{C}_a$	$\tilde{C}_{ma}$	C_a	C_{ma}	C_m
HD	2.50	0.175	0.40	0.40	1.00	$s_t \cdot 0.07$	1.0
CH ₄	1.34	0.047	0.60	0.00	0.80	0.00	1.0
CO	1.25	0.091	1.10	0.00	1.38	0.00	1.2
N ₂	1.46	0.092	1.00	0.00	1.46	0.00	1.2

auch noch Q_{tr} und Q_{long} angegeben für einen repräsentativen Satz von 30 φ_T - Stützstellen. Die vergleichsweise großen Abweichungen für HD bei $1/d = 0.05$ sind vielleicht darauf zurückzuführen, daß hier die lineare Näherung in $1/d$ schon nicht mehr ausreicht wegen der ziemlich großen Werte der Knudsen-Parameter.

Ein für einen größeren $1/d$ - Bereich ($0.005 \leq 1/d \leq 0.05$) recht gut brauchbarer Satz von Oberflächenkoeffizienten kann aus Tabelle 7 entnommen werden und ist in Tabelle 8 angegeben zusammen mit den aus (11.2) und Tabelle 4 folgenden Zahlenwerten für

$$C_a = \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_T}} \tilde{C}_a \quad \text{und} \quad C_{ma} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \tilde{C}_{ma};$$

das Vorzeichen von C_{ma} ist durch das Vorzeichen s_t von $\omega_{\eta T}$ (das gleich dem von ω_{kt} ist, siehe auch §4.(b)) bestimmt.

Für die Gase CH₄, CO und N₂ ergab sich $\tilde{C}_{ma} = 0.00$ als recht brauchbarer Wert; andere mögliche Werte von $\tilde{C}_{ma}$ liegen bei etwa ± 0.05 , aber auch dann ist C_{ma} noch um eine Größenordnung kleiner als bei HD.

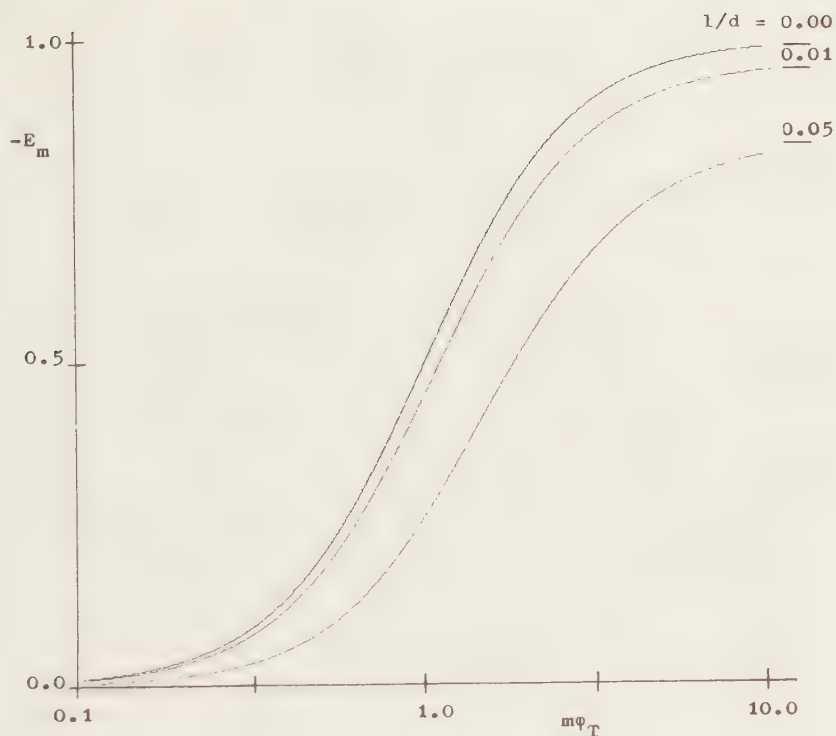


Fig.6. Einfluß der Knudsen-Korrekturen auf den SBE der Viskosität: Longitudinaleffekt $-E_m$ für HD, berechnet aus (12.9) mit $\tilde{C}_m = 1.0$, $\tilde{C}_a = 0.40$, $\tilde{C}_{ma} = 0.40$; der Sättigungswert ist durch einen Strich am rechten Rand angedeutet.

Am Beispiel von HD (mit den Koeffizienten aus Tabelle 8) ist der Einfluß der Knudsen-Korrekturen auf E_m und E_m^{tr} in Fig.6. bzw. Fig.7. gezeigt.

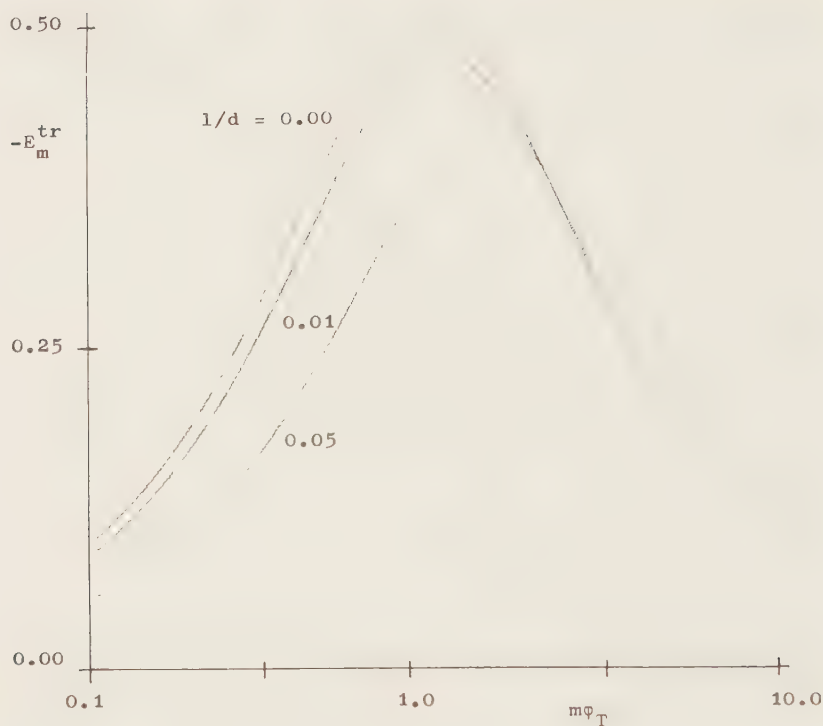


Fig.7. Einfluß der Knudsen-Korrekturen auf den SBE der Viskosität: Transversaleffekt $-E_m^{tr}$ für HD, berechnet aus (12.9) mit $C_m = 1.0$, $\tilde{C}_a = 0.40$, $\tilde{C}_{ma} = 0.40$.

II. STRÖMUNG IM KREISROHR

§14. Berechnung der Anisotropiegrößen und des Feldeinflusses auf die Strömung.

Die Methode zur Berechnung der Anisotropiegrößen und des Einflusses eines Magnetfelds auf die Strömung wurde in §11 bei der Behandlung des Plattenproblems geschildert. Der Rechenaufwand ist bei der Zylindergeometrie etwas größer, da u jetzt der richtungsabhängige "radiale" Einheitsvektor ist (r ist der senkrechte Abstand von der Rohrachse e, siehe (10.2) und Fig.2.), während u bei der ebenen Geometrie (siehe Fig.1.) eine konstante Richtung anzeigte. Wenn das Magnetfeld eine Komponente senkrecht zu e hat, ist die azimuthale Symmetrie gestört, und die Geschwindigkeit v beispielsweise kann vom Azimutwinkel ϕ abhängen. Hier soll ϕ von hxe aus gezählt werden, ferner soll χ den Winkel zwischen e und h bedeuten; dann gilt (Fig.8.)

$$\underline{h} \cdot \underline{e} = \cos \chi, (\underline{h} \times \underline{e}) \cdot \underline{u} = \sin \chi \cos \phi, \underline{h} \cdot \underline{u} = \sin \chi \sin \phi, \quad (1)$$

exu ist demnach der Einheitsvektor in ϕ -Richtung. Aus der Richtungsabhängigkeit von u, $\nabla \underline{u} = \underline{e} \times \underline{u} \quad \underline{e} \times \underline{u} \frac{1}{r}$, folgt z.B.

$$\nabla \cdot \nabla f(r) \underline{e} \underline{u} = \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f \right) \underline{e} \underline{u}. \quad (2)$$

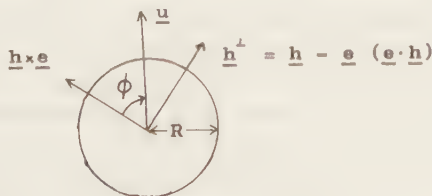


Fig.8. Zur Definition des Azimutwinkels ϕ in einer Ebene senkrecht zur Rohrachse e.

Zunächst werden nun die Tensorpolarisation $\underline{a}$ und ihr Strom $\underline{b}$ aus der isotropen Lösung $\underline{v}_{\text{iso}}$ berechnet und dann daraus die die $\underline{e}$ -Komponente des anisotropen Strömungsfelds und des zusätzlichen Druckgradienten im Magnetfeld bestimmt.

(a) Tensorpolarisation und Tensorpolarisationsstrom

Statt der Größen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ werden $\tilde{\underline{a}}$ und $\tilde{\underline{b}}$ verwendet:

$$\underline{a} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta\tau}}{\omega_{\tau}} \frac{R}{2p_0} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \tilde{\underline{a}}, \quad \underline{b} = -\sqrt{2} \frac{\omega_{\eta\tau}}{\omega_{\tau}} \frac{l_k}{2p_0} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \tilde{\underline{b}}. \quad (3)$$

Nach (10.10) genügt $\tilde{\underline{a}}$ der Differentialgleichung

$$(1 - L_m^2 \nabla \cdot \nabla) \mathcal{P}^{(m)} : \tilde{\underline{a}} = \frac{\frac{r}{R}}{1 + im\varphi_{\tau}} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}},$$

aus der sich mit dem Ansatz $\mathcal{P}^{(m)} : \tilde{\underline{a}} = \left[\frac{\frac{r}{R}}{1 + im\varphi_{\tau}} + A_m \left(\frac{r}{L_m} \right) \right] \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}}$, und unter Benutzung von (2), die Differentialgleichung der zugeordneten Besselfunktionen zum Index 1 für die Funktion A_m ergibt ⁴³⁾

$$\frac{d^2 A_m}{d \left(\frac{r}{L_m} \right)^2} + \frac{1}{s_m} \frac{d A_m}{d s_m} - \left(1 + \frac{1}{s_m^2} \right) A_m = 0, \quad s_m = \frac{r}{L_m}.$$

Von den beiden Lösungen $I_1(s_m)$, $K_1(s_m)$ kommt wegen der Forderung der Regularität auf der Achse ($r = 0$) nur I_1 in Frage, daher ist

$$\tilde{\underline{a}} = \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}} \left[\frac{\frac{r}{R}}{1 + im\varphi_{\tau}} - \alpha_m \frac{I_1\left(\frac{r}{L_m}\right)}{I_1\left(\frac{R}{L_m}\right)} \right] \quad (4)$$

Aus dem Ansatz (9.21) für $\underline{b}$ und mit $\underline{a}_{\text{iso}}^{(34)}$ aus (11.4) ergibt sich der Randwert ($r = R$) von $\underline{u} \cdot \tilde{\underline{b}}$ zu

$$\underline{u} \cdot \tilde{\underline{b}} = \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}} \frac{1}{1 + im\varphi_k} \left[\frac{1}{1 + im\varphi_{\tau}} + 2a_{\tau t} - \alpha_m \frac{R}{L_m} \left(\frac{L_m}{R} + \frac{I_2\left(\frac{R}{L_m}\right)}{I_1\left(\frac{R}{L_m}\right)} \right) \right], \quad (5)$$

damit läßt sich die Konstante α_m aus der m -Komponente der Randbedingung (10.11)

$$\tilde{\underline{a}} = -\frac{L_0}{R} \tilde{\underline{c}}_a (\underline{u} \cdot \tilde{\underline{b}})_R - \tilde{\underline{c}}_{am} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}}$$

berechnen zu

$$\alpha_m = \frac{\frac{1}{1 + im\varphi_{\tau}} + \tilde{\underline{c}}_{am} + \tilde{\underline{c}}_a \frac{L_0}{R} \frac{1}{1 + im\varphi_k} \left(\frac{1}{1 + im\varphi_{\tau}} + 2a_{\tau t} \right)}{1 + \tilde{\underline{c}}_a \sqrt{\frac{1 + im\varphi_{\tau}}{1 + im\varphi_k}} \left(\frac{L_m}{R} + \frac{I_2\left(\frac{R}{L_m}\right)}{I_1\left(\frac{R}{L_m}\right)} \right)} \quad (6)$$

Bei der Strömung zwischen ebenen Platten trat die hyperbolische Funktion $\sinh \frac{y}{L_m}$ auf, an ihre Stelle tritt bei der Rohrströmung die zugeordnete Besselfunktion $I_1(\frac{r}{L_m})$, wie der Vergleich von (11.3) und (4) zeigt. Nun gilt ⁴³⁾

$$\frac{d}{ds_m} I_1(s_m) = \frac{1}{s_m} I_1(s_m) + I_2(s_m) \quad \text{und} \quad \frac{d}{d(y/L_m)} \sinh \frac{y}{L_m} = \cosh \frac{y}{L_m},$$

daher sind die beiden Ausdrücke (11.7) und (6) für die α_m gut vergleichbar.

(b) Strömung im Magnetfeld

Das durch die Anisotropiegrößen bestimmte Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}_1$ (nach (11.11) ist $\underline{v}(\underline{x}, \underline{H}) = \underline{v}_{iso}(\underline{x}) + \underline{v}_1(\underline{x}, \underline{H})$) und die Druckverteilung im Magnetfeld sind von der Größenordnung $A_{\eta T} \underline{v}_{iso}$ bzw. $A_{\eta T} (\frac{dp}{dz})_0 \underline{e}$:

$$\underline{v}_1 = A_{\eta T} \frac{R^2}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{v}, \quad \underline{\nabla} p = \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{e} + A_{\eta T} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{p}, \quad (7)$$

für $\underline{H} = \underline{0}$ ist $\underline{p} = \underline{0}$.

Durch Subtraktion von $\frac{1}{\eta_{iso}} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 \underline{e} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}_{iso} = \underline{0}$ erhält man aus (5.11) eine Differentialgleichung für $\underline{v}_1$ bzw. für $\underline{v}$:

$$\frac{1}{R^2} \underline{p} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} = \frac{1}{R} \underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{a}} + \frac{L_0^2}{R^2} A_{\eta T} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{\tilde{B}} - \underline{\nabla} \underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{B}}) - \frac{L_0}{R} \left(c_i + \frac{4}{5} \frac{\omega_{\eta}^{(21)}}{\omega_{\eta}} \right) \frac{1}{R} \underline{\nabla} \tau^1,$$

wobei die Differenztemperatur T' als $T' = \frac{T_0}{P_0} \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 L_0 A_{\eta T} \tau^1$ geschrieben wurde. Aufgrund der in der Randbedingung (8.2) und in der Differentialgleichung (5.9) auftretenden Inhomogenitäten kann τ^1 nicht von z abhängen ($z = \underline{x} \cdot \underline{e}$); aus der Annahme, daß $\underline{v}$ nur von r und ϕ abhängt, folgt dann, daß auch $\underline{p}$ nur eine Funktion von r und ϕ (und auch von $\underline{H}$) ist. Dann ist aber $\frac{\partial p}{\partial z}$ konstant:

$$\underline{e} \cdot \underline{p} = \text{const} = p_z, \quad p_z = p_z(\underline{H}), \quad p_z(\underline{0}) = 0. \quad (8)$$

Das ist die Meßgröße, die berechnet werden soll; dazu genügt es, $\underline{e} \cdot \underline{v} = v_z$ zu bestimmen. Daher wird hier auf die Berechnung

von $\underline{u} \cdot \underline{V} = V_r$ und $(\underline{ex} \underline{u}) \cdot \underline{V} = V_\phi$ verzichtet, zumal dann auch die Temperaturverteilungen T und T' bestimmt werden müßten. Wird die Rechnung durchgeführt, so zeigt sich, daß V_r und V_ϕ proportional zur Knudsenzahl $\frac{1}{R}$ sind und als winkelabhängige Anteile $\sin \phi$, $\cos \phi$, $\sin 3\phi$, $\cos 3\phi$ enthalten; für $\frac{1}{R} = 0$ verschwinden also V_r und V_ϕ , ebenso für $\underline{H} = \underline{0}$.

Für V_z sind die Differentialgleichung

$$\frac{1}{R^2} P_z - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} V_z = \frac{1}{R} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{a}}) \cdot \underline{e} + \frac{L_0^2}{R^2} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{e} \cdot \underline{\tilde{B}} a_{Tt}, \quad (9)$$

und die aus $\left(\underline{v} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p_0} q_{\perp}^{tr} \right)_1^{\tan} = \frac{\ell}{\eta_{00}} C_m k_1^{\tan} + \frac{c_0}{\sqrt{3}} C_{ma} \underline{b}$

(nach (9.10), siehe p. 62) abgeleitete Randbedingung

$$V_z + \frac{2}{5} \frac{\ell \ell_t}{R^2} P_z + \frac{L_0^2}{R^2} a_{Tt} \underline{e} \cdot \underline{\tilde{B}} = - \frac{L_0^2}{R^2} \tilde{C}_{ma} \underline{e} \cdot \underline{\tilde{b}} - \frac{\ell}{R} C_m \left[R \frac{\partial}{\partial r} \left(V_z + \frac{L_0^2}{R^2} a_{Tt} \underline{e} \cdot \underline{\tilde{B}} \right) + (\underline{u} \underline{e}) : \underline{\tilde{a}} \right] \quad (10)$$

zu erfüllen. Die hierin auftretenden Inhomogenitäten werden mit Hilfe der Formel (siehe Anhang III)

$$\sum_{m=-2}^{+2} \left[\gamma_m(\underline{u} \underline{e}) : \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\tilde{u} \underline{e}} + \tilde{\gamma}_m(\underline{e} \times \underline{u} \underline{e}) : \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\tilde{e} \times \underline{u} \underline{e}} \right] = \sum_{m=0}^{+2} \left[q_m(\chi) \Re(\gamma_m + \tilde{\gamma}_m) - \cos 2\phi f_m(\chi) \Re(\gamma_m - \tilde{\gamma}_m) \right] \quad (11)$$

ausgewertet. Die Funktionen von χ

$$\left. \begin{aligned} q_0(\chi) &= \frac{3}{16} \sin^2 2\chi, & q_1(\chi) &= \frac{1}{4} (\cos^2 \chi + \cos^2 2\chi), & q_2(\chi) &= \frac{1}{4} \sin^2 \chi (1 + \cos^2 \chi), \\ f_0(\chi) &= \frac{3}{16} \sin^2 2\chi, & f_1(\chi) &= \frac{1}{4} \sin^2 \chi (1 - 4 \cos^2 \chi), & f_2(\chi) &= -\frac{1}{4} \sin^4 \chi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

haben die Eigenschaften

$$\sum_{m=0}^{+2} q_m(\chi) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{m=0}^{+2} f_m(\chi) = 0. \quad (13)$$

Da γ_m und $\tilde{\gamma}_m$ noch Funktionen von r sind, haben die Inhomogenitäten alle die Gestalt $f(r) + \tilde{f}(r) \cos 2\phi$. Deshalb wird für V_z der Ansatz

$$V_z = G(r) + F(r) \cos 2\phi$$

gemacht; dann gilt mit $\nabla r = \underline{u}$ und $\nabla \phi = \frac{1}{r} \underline{e} \times \underline{u}$

$$\nabla \cdot \nabla V_z = \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} + \cos 2\phi \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{4}{r^2} F \right),$$

und es ist $\nabla \cdot \nabla V_z = 0$ für

$$G^{(0)} = \beta_0 + \tilde{\beta}_0 \ln \frac{r}{R}, \quad F^{(0)} = \beta_1 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \tilde{\beta}_1 \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

da V_z regulär sein soll auf der Achse ($r = 0$), ist $\tilde{\beta}_0 = 0 = \tilde{\beta}_1$.

Die Differentialgleichung für $G(r)$

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} = \frac{1}{R^2} \tilde{P}_z + \sum_{m=0}^{+2} g_m(x) \operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{\alpha}_m}{R L_m} \bar{I}_0 \left(\frac{r}{L_m} \right) \cdot (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right]$$

hat die partikuläre Lösung

$$G^{(1)}(r) = \frac{1}{4} \tilde{P}_z \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + \sum_{m=0}^{+2} g_m(x) \operatorname{Re} \left[\tilde{\alpha}_m \frac{L_m}{R} \bar{I}_0 \left(\frac{r}{L_m} \right) \cdot (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right],$$

dabei ist $\tilde{\alpha}_m$ eine Abkürzung für $\tilde{\alpha}_m = \alpha_m / I_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)$ und $\tilde{P}_z$ für

$$\tilde{P}_z = P_z - 1 + 2 \sum_{m=1}^2 g_m(x) \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} \quad (14)$$

Die Differentialgleichung für $F(r)$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{4}{r^2} F = - \sum_{m=0}^{+2} f_m(x) \operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{\alpha}_m}{R L_m} \bar{I}_2 \left(\frac{r}{L_m} \right) \cdot (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right]$$

hat die partikuläre Lösung

$$F^{(1)}(r) = - \sum_{m=0}^{+2} f_m(x) \operatorname{Re} \left[\tilde{\alpha}_m \frac{L_m}{R} \bar{I}_2 \left(\frac{r}{L_m} \right) \cdot (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right].$$

Das Geschwindigkeitsfeld V_z hat also zusammenfassend die folgende Gestalt

(15)

$$V_z = \beta_0 + \frac{1}{4} \tilde{P}_z \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + \sum_{m=0}^{+2} g_m(x) \operatorname{Re} \left[\tilde{\alpha}_m \frac{L_m}{R} \frac{\bar{I}_0 \left(\frac{r}{L_m} \right)}{\bar{I}_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)} (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right] \\ + \cos 2\phi \left[\beta_1 \frac{r^2}{R^2} - \sum_{m=0}^{+2} f_m(x) \operatorname{Re} \left[\tilde{\alpha}_m \frac{L_m}{R} \frac{\bar{I}_2 \left(\frac{r}{L_m} \right)}{\bar{I}_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)} (1 + (1 + im\varphi_T) a_{Tt}) \right] \right].$$

Die Mittelung über den Rohrquerschnitt liefert mit $\bar{I}_0 = 2 \frac{L_m}{R} \bar{I}_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)$

das Ergebnis

$$\bar{V}_z = \beta_0 - \frac{1}{8} \tilde{P}_z + 2 \sum_{m=0}^{+2} g_m(\chi) \operatorname{Re} \left[\alpha_m \left(\frac{L_m}{R} \right)^2 \left(1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt} \right) \right] \quad (16)$$

Die drei Konstanten β_0 , β_1 und P_z , die von Richtung und Stärke des Magnetfelds abhängen, sind aus drei Bedingungsgleichungen zu ermitteln. Eine solche Bedingung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Kapillare Teil einer Brückenordnung ist (siehe (11.19) und (10.9), sowie Anhang IV); aus

$$\overline{V_z(\tau, \phi; H)} - \overline{V_z(\tau, \phi; 0)} \approx \delta P_z \frac{1}{8} \left[1 + 4 \frac{\ell}{R} C_m + \frac{16}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{R^2} \right]$$

folgt

$$\begin{aligned} \beta_0(H) - \beta_0(0) &= \frac{1}{8} P_z \left(1 + \delta + \delta 4 \frac{\ell}{R} C_m + \delta \frac{16}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{R^2} \right) + \alpha_0 \left(\frac{L_0}{R} \right)^2 (1 + a_{Tt}) \\ &+ \sum_{m=0}^{+2} g_m(\chi) \left[\frac{1}{4} \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} - 2 \operatorname{Re} \left[\alpha_m \left(\frac{L_m}{R} \right)^2 \left(1 + (1 + i m \varphi_T) a_{Tt} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Die Randbedingung (10) liefert für β_0 und β_1 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{1}{2} P_z \left(\frac{\ell}{R} C_m + \frac{4}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{R^2} \right) \\ &- \frac{10}{3} \left(\frac{L_0}{R} \right)^2 a_{Tt}^2 \left[1 - \frac{3}{5} \frac{\varphi_K^2}{1 + \varphi_K^2} \cos^2 \chi - \frac{3}{10} \left(\frac{\varphi_K^2}{1 + \varphi_K^2} + \frac{8 \varphi_K^2}{1 + 4 \varphi_K^2} \right) \sin^2 \chi \right] \\ &- \sum_{m=0}^{+2} g_m(\chi) \operatorname{Re} \left[\alpha_m \frac{L_m}{R} \frac{I_0 \left(\frac{R}{L_m} \right)}{I_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)} \left(1 - (1 + i m \varphi_T) \tilde{C}_{ma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L_m}{R} \right)^2 \left(\tilde{C}_{ma} + 2 a_{Tt} + (1 + i m \varphi_T) \tilde{C}_{ma} (2 a_{Tt} + \alpha_m) \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{1 + 2 \frac{\ell}{R} C_m} \sum_{m=0}^{+2} f_m(\chi) \operatorname{Re} \left[-\frac{\ell}{R} C_m \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} + \right. \\ &+ \alpha_m \frac{L_m}{R} \frac{I_2 \left(\frac{R}{L_m} \right)}{I_1 \left(\frac{R}{L_m} \right)} \left(1 - (1 + i m \varphi_T) \tilde{C}_{ma} - 2 \frac{\ell}{R} C_m \right) + \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{ma} \left(\frac{L_m}{R} \right)^2 \left(1 + (1 + i m \varphi_T) (2 a_{Tt} - \alpha_m) \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Da $P_z(\underline{H=0}) = 0$ ist, folgt aus (18) ein expliziter Ausdruck für $\beta_o(\underline{H=0})$, und damit ergibt sich aus (17) und (18) die Meßgröße $(1 + \delta) P_z$ der Brückenordnung zu

$$(1 + \delta) P_z = \frac{1}{2} (\cos^2 \chi + \cos^2 2\chi) E_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi (1 + \cos^2 \chi) E_2 + \frac{8 (L_o/R)^2 a_{Tt}}{1 + 4 \ell/R C_m + \frac{16}{5} \ell_z \ell_t / R^2} \left[(1 + \cos^2 \chi) \frac{\varphi_K^2}{1 + \varphi_K^2} + \sin^2 \chi \frac{8 \varphi_K^2}{1 + 4 \varphi_K^2} \right] \quad (20)$$

wobei E_m ($m = 1, 2$) der Realteil einer komplexen Funktion ist:

$$E_m = \frac{1}{1 + 4 \ell/R C_m + \frac{16}{5} \ell_z \ell_t / R^2} \operatorname{Re} \left[\frac{-m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} - 4 \alpha_m \frac{L_m}{R} \frac{I_2(\frac{R}{L_m})}{I_1(\frac{R}{L_m})} \left(1 - (1 + i m \varphi_T) \tilde{C}_{ma} \right) + 4 \alpha_o \frac{L_o}{R} \frac{I_2(\frac{R}{L_o})}{I_1(\frac{R}{L_o})} (1 - \tilde{C}_{ma}) + 4 \left(\frac{L_o}{R} \right)^2 (\tilde{C}_{ma} + 2 a_{Tt}) \left(\frac{\alpha_m}{1 + i m \varphi_K} - \alpha_o - \frac{1}{(1 + i m \varphi_T)(1 + i m \varphi_K)} + 1 \right) + 8 \left(\frac{L_o}{R} \right)^2 \tilde{C}_{ma} a_{Tt} \frac{m^2 \varphi_K^2}{1 + m^2 \varphi_K^2} \right] \quad (21)$$

Nach (15) und (19) enthält der winkelabhängige Teil der Strömungsgeschwindigkeit V_z die Knudsenzahl $\frac{1}{R}$ als Faktor, verschwindet also im hydrodynamischen Grenzfall. Darüberhinaus verschwindet der winkelabhängige Beitrag zu V_z unabhängig von der Knudsenzahl in folgenden Fällen:

- i) auf der Rohrachse (für $r = 0$ ist ⁴³⁾ $I_2(0) = 0$);
- ii) falls das Magnetfeld parallel zur Rohrachse ist (für $\chi = 0$ ist nach (12) $f_m(0) = 0$);
- iii) ohne Magnetfeld (da $H = 0$ ist und nach (13) gilt

$$\sum_{m=0}^{+2} f_m(\chi) = 0 \quad .$$

§15. Diskussion der Lösung und Vergleich mit dem Experiment

(a) Die hydrodynamische Näherung : $\frac{1}{R} = 0$

Für $\frac{1}{R} = 0$ ist $I_2 \left(\frac{R}{L_m} \right) / I_1 \left(\frac{R}{L_m} \right) = 1$, folglich gilt nach (14.21)

$$E_m = - \frac{m^2 \varphi_T^2}{1 + m^2 \varphi_T^2} \quad , \quad (1)$$

und aus (14.20) ergibt sich der Zusammenhang mit dem longitudinalen Druckgradienten

$$(1 + \delta) P_z = \frac{1}{2} (\cos^2 \chi + \cos^2 2\chi) E_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi (1 + \cos^2 \chi) E_2 \quad . \quad (2)$$

Bei Verwendung des allgemeinen Ansatzes (3.28,29) für den Reibungsdrucktensor erhält man die Formel ($\xi_m = A_{\eta_T} E_m$)

$$(1 + \delta) P_z = \frac{3}{8} \sin^2 2\chi E_0 + \frac{1}{2} (\cos^2 \chi + \cos^2 2\chi) E_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi (1 + \cos^2 \chi) E_2 \quad , \quad (3)$$

die mit $E_0 = 0$ in (2) übergeht.

Nach (14.15,19) hat V_z für $\frac{1}{R} = 0$ keinen ϕ -abhängigen Anteil; außerdem ist nach (14.18) auch $\beta_0 = 0$, sowie nach (14.14,12), (1) und (2) $\tilde{P}_z = -(1 + \delta P_z)$:

$$V_z = \frac{1}{4} (1 + \delta P_z) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad . \quad (4)$$

Der gesamte Druckgradient in $\underline{e}$ -Richtung ist gegeben durch

$\underline{e} \cdot \nabla p = \left(\frac{dp}{dz} \right)_0 (1 + A_{\eta_T} P_z)$, mit $\underline{v}_{iso}$ aus (10.9) läßt sich dann das gesamte Geschwindigkeitsfeld in $\underline{e}$ -Richtung in der Form

$$\underline{e} \cdot \underline{v} \approx - \frac{R^2}{4 \eta_{eff}} \underline{e} \cdot \nabla p \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad , \quad \eta_{eff} = \eta (1 + A_{\eta_T} (1 + \delta) P_z) \quad (5)$$

schreiben. Die relative Änderung der feldabhängigen effektiven Viskosität η_{eff} gegenüber dem feldfreien Wert $\eta = \eta_{iso} (1 + A_{\eta_T})$

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} \equiv \frac{\eta_{eff} - \eta}{\eta} = A_{\eta_T} (1 + \delta) P_z \quad (6)$$

ist die Meßgröße bei der Brückenordnung (siehe Anhang IV). Die Formeln (4), (5), (6) entsprechen den Gln. (14.6, 7, 8) bei der Strömung zwischen ebenen Platten.

Mit Hilfe der allgemeinen Beziehung (3) sind in der folgenden Tabelle 9 die bei einigen Winkeln auftretenden Kombinationen der E_0 , E_1 , E_2 angegeben. Bei den Korving'schen Messungen ^{8) 44d)} befanden sich die beiden Kapillaren C_1 und C_3 (Bezeichnungen nach Anhang IV) gekreuzt im Magnetfeld, und zwar war die Achse von C_1 senkrecht, die von C_3 parallel zum Feld, dh. $\chi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\chi_3 = 0$. Mit dieser Anordnung konnte Korving ⁸⁾ auch die Dominanz des Beitrags der Tensorpolarisation zum SBE der Viskosität der Gase N_2 , CO, CO_2 , CH_4 und CF_4 zeigen (dh. $\eta_1 \approx \eta$), und das abweichende Verhalten von NH_3 ^{44d)}. Der Zusammenhang (2) zwischen P_z und E_1 , E_2 gilt nicht nur in hydrodynamischer Näherung, sondern auch noch bei der in $\frac{1}{R}$ linearen Näherung (mit den entsprechenden E_1 , E_2 aus (14.21)), Tabelle 9 ist dann ebenfalls noch brauchbar ($E_0 = 0$).

Tabelle 9 : Meßgrößen bei der Strömung im Kreisrohr für verschiedene Richtungen des Magnetfelds, berechnet aus (3); χ ist der Winkel zwischen Magnetfeld und Rohrachse.

χ	$(1 + \delta) P_z$	$\Delta\eta = \eta A_{\eta}(1 + \delta) P_z$	Ref.
0	E_1	$\eta_3 - \eta$	8) 44d)
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}E_1 + \frac{3}{8}E_2 + \frac{3}{8}E_0$	$\frac{1}{4}(3\eta_2 + \eta_3 - 4\eta)$	----
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{2}(\eta_3 + 2\eta_2 - \eta_1 - 2\eta)$	44a, b, c)
$\chi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\chi_3 = 0$	$\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$	$\frac{1}{2}(2\eta_2 - \eta_1 - \eta_3)$	8) 44d) gekreuzte Kapillaren C_1 , C_3 im Magnetfeld

Im hydrodynamischen Grenzfall ($1/R = 0$) hat die Meßgröße $-(1 + \delta) P_z$ für $\chi = 0 \quad \pi/4 \quad \pi/2$ den Sättigungswert 1.0 0.625 1.0, der halbe Sättigungswert wird bei 1.0 0.6562 0.7071 $= (\varphi_T)_{1/2}$ erreicht; für die gekreuzten Kapillaren liegt der Maximalwert $1/6$ bei $(\varphi_T)_{\max} = 0.7071$. Der Gesamtverlauf der vier genannten Funktionen ist in Fig.9. dargestellt ($0.1 \leq \varphi_T \leq 10.0$).

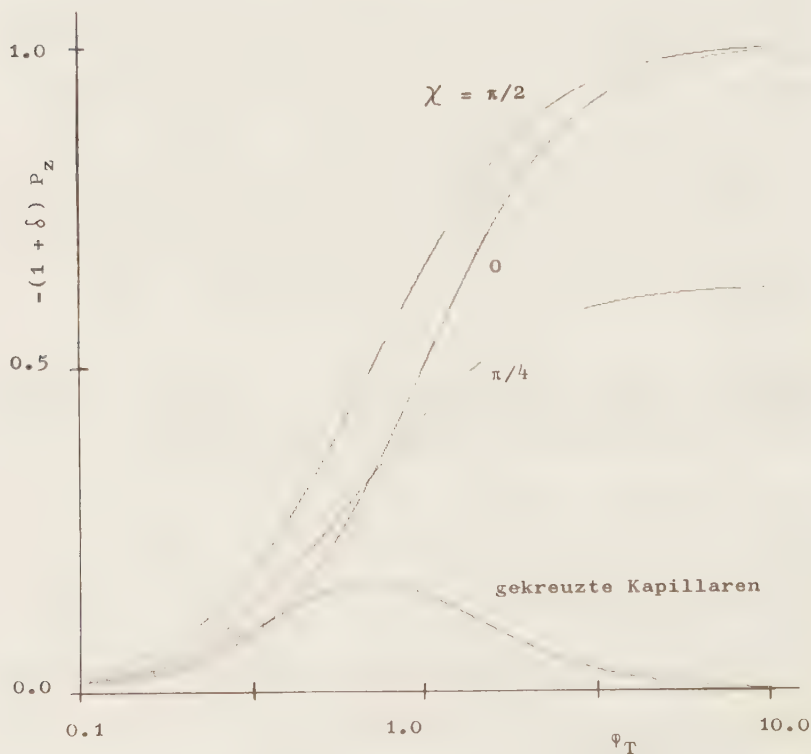


Fig.9. Die Meßgröße $-(1 + \delta) P_z$ beim SBE der Viskosität in der Kreiskapillare, berechnet für $1/d = 0$ aus (1) und (2) für die Winkel $\chi = 0, \pi/4, \pi/2$ und für die gekreuzten Kapillaren ^{8) 44d)}, vergleiche mit Tabelle 9.

(b) Die in $\frac{1}{R}$ lineare Korrektur an der hydrodynamischen Näherung.

Jetzt werden E_1 und E_2 aus (14.21) berechnet bis zu Termen, die linear in $\frac{1}{R}$ sind. Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung der zugeordneten Besselfunktionen ⁴³⁾

$$I_\nu(s) \approx \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8} + \dots \right) \quad \text{für } |s| \gg 1 \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

und α_m aus (14.6) folgt (beachte $\tilde{c}_{am} = -\tilde{c}_{ma}$)

$$\alpha_m \frac{L_m}{R} \frac{I_2\left(\frac{R}{L_m}\right)}{I_1\left(\frac{R}{L_m}\right)} \left(1 - (1 + i m \varphi_r) \tilde{c}_{ma} \right) \approx \frac{L_m}{R} \frac{\left(\frac{1}{1 + i m \varphi_r} - \tilde{c}_{ma} \right)^2}{\tilde{c}_a + \sqrt{\frac{1 + i m \varphi_k}{1 + i m \varphi_r}}}$$

und somit ist nach (14.21)

$$E_m \approx \frac{-m^2 \varphi_r^2}{1 + m^2 \varphi_r^2} \frac{1}{1 + 4 \frac{L_m}{R} C_m} - 4 \frac{L_m}{R} \operatorname{Re} \left[\frac{\left(\frac{1}{1 + i m \varphi_r} - \tilde{c}_{ma} \right)^2}{\tilde{c}_a + \sqrt{\frac{1 + i m \varphi_k}{1 + i m \varphi_r}}} - \frac{(1 - \tilde{c}_{ma})^2}{\tilde{c}_a + 1} \right] \quad (7)$$

Mit diesen Angaben für E_1 und E_2 ($E_0 = 0$) ist nach der auch jetzt noch geltenden Beziehung (2) die Meßgröße $(1 + \delta) P_z$ bestimmt. Der Vergleich mit der Strömung zwischen parallelen Platten (vom Abstand $2d$) zeigt, daß man im Realteil von (12.9) einfach $\frac{3}{d}$ durch $\frac{4}{R}$ ersetzen muß, um (7) zu erhalten. Die ganze auf (12.9) folgende Diskussion kann daher, bis einschließlich (12.17), auf die Rohrströmung übertragen werden, mit der Ersetzung $\left[\frac{3}{d} \rightarrow \frac{4}{R} \right]$ (bei den Longitudinaleffekten), braucht also nicht wiederholt zu werden.

Die Tensorpolarisation $\underline{\underline{\hat{a}}}$ und die Geschwindigkeit $\underline{v}$ haben am Rand ($r = R$) die Werte

$$\underline{\underline{\hat{a}}} = \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{e}} \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_r} - \alpha_m \right), \quad (8)$$

bezw.

$$V_z = \frac{\ell}{R} C_m \sum_{m=1}^{+2} \frac{m^2 \varphi_T^2}{1+m^2 \varphi_T^2} \left(\frac{1}{1+\delta} g_m(\chi) - \cos 2\phi f_m(\chi) \right) + \frac{L_0}{R} (a_{Tb} + \tilde{C}_{ma}) \sum_{m=0}^{+2} \operatorname{Re} \frac{\frac{1}{1+im\varphi_T} - \tilde{C}_{ma}}{\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1+im\varphi_T}{1+im\varphi_T}}} (g_m(\chi) - \cos 2\phi f_m(\chi)) \quad (9)$$

im Gasinneren ($R - r \gg L_0$) sind die zu α_m proportionalen Anteile (die den Einfluß der Wand auf die Tensorpolarisation beschreiben) verschwunden, denn für $L_0 \ll r \leq R$ gilt

$$I_\nu \left(\frac{r}{L_m} \right) / I_1 \left(\frac{R}{L_m} \right) \approx \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{R-r}{L_m} \right), \text{ hier ist } \nu = 0, 1, 2.$$

Dann ist das Geschwindigkeitsprofil quadratisch

$$V_z = \beta_0 + \frac{1}{4} \tilde{P}_2 \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + \beta_1 \frac{r^2}{R^2} \cos 2\phi \quad (10)$$

und die Tensorpolarisation hat den durch den Drucktensor bestimmten linearen Verlauf

$$\tilde{a}^{(0)} = \frac{r}{R} \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}} \frac{1}{1+im\varphi_T} \quad (11)$$

ähnlich wie beim Plattenproblem (siehe (12.21), §11.(a) p.57).

(c) Vergleich mit dem Experiment

Die einzigen Messungen mit Kreiskapillaren, bei denen quantitative Knudsen-Korrekturen veröffentlicht wurden, stammen von J. Korving⁸⁾; er hat nur die Reduktion der Höhe des Effekts beschrieben durch den Faktor $1 + N_\beta 1/R$, und für die untersuchten Gase (N_2 , CO, CO_2 , CH_4 , CF_4) $N_\beta \approx 8$ gefunden. Aufgrund der Ersetzung $\frac{3}{d} \rightarrow \frac{4}{R}$ müßte man theoretisch N_β erhalten aus den Messungen der Knudsen-Korrekturen an den Longitudinaleffekten im rechteckigen Kanal durch Hulsman e.a.¹⁰⁾

$$\boxed{N_\beta^{\text{theor}} = \frac{2}{3} n_\beta^{\text{long}}} \quad (12)$$

ebenso müßte man die von Korving⁸⁾ nicht angegebene Dehnung der H/p_0 -Achse, $1 + N_\gamma 1/R$, erhalten aus

$$N_{\gamma}^{\text{theor}} = \frac{2}{3} n_{\gamma}^{\text{long}} \quad . \quad (13)$$

Hiermit ergäbe sich beispielsweise für N_2 (siehe Tabelle 10) bei der höchsten auftretenden Knudsenzahl von $1/R = 0.047$ ($R = 0.5 \text{ mm}$, $p_0 = 2.12 \text{ torr}$, 1 nach Tabelle 3) eine Korrektur an der Lage des halben Sättigungswerts von etwa 13 %.

In Tabelle 10 werden die Parameter der Knudsen-Korrekturen für die Rohr- und Plattenströmung miteinander verglichen. Die Beziehung (12) stimmt somit genau für N_2 und näherungsweise für CO und CH_4 ; die Diskrepanzen beruhen vielleicht auch auf der Ungenauigkeit der Werte für N_{β} und n_{β}^{long} . Daher sind in der Tabelle auch die aus beiden Messungen ^{8) 10)} erhaltenen Mittelwerte

$\overline{n_{\beta}^{\text{long}}} = \frac{1}{2} n_{\beta}^{\text{long}} + \frac{3}{4} N_{\beta}$ und $\overline{N_{\beta}} = \frac{1}{2} N_{\beta} + \frac{1}{3} n_{\beta}^{\text{long}}$ angegeben worden.

Tabelle 10 : Vergleich der Knudsen-Korrekturen für die Rohrströmung ⁸⁾ und die Plattenströmung ¹⁰⁾.

	8) N_{β}	10) n_{β}^{long}	N_{β}^{theor} aus (12)	10) n_{γ}^{long}	$N_{\gamma}^{\text{theor}}$ aus (13)	$\overline{n_{\beta}^{\text{long}}}$	$\overline{N_{\beta}}$
HD	---	6.0	4.0	14.0	9.3	6.0	4.0
CH_4	8.0	9.0	6.0	3.0	2.0	10.5	7.0
CO	8.0	10.0	6.7	2.0	1.3	11.0	7.3
N_2	8.0	12.0	8.0	4.0	2.7	12.0	8.0
CO_2	8.0	----	---	---	---	12.0	8.0
CF_4	8.0	----	---	---	---	12.0	8.0

TEIL C

THERMOMAGNETISCHE DRUCKDIFFERENZ

§16. Die Berechnung der Druckdifferenz

Die thermomagnetische Druckdifferenz ist einer der Effekte, die charakteristisch sind für das Verhalten verdünnter, mehratomiger Gase im Magnetfeld: sie tritt nur auf, wenn alle drei Bedingungen "verdünnt", "mehratomig", "mit Magnetfeld" erfüllt sind. Der Effekt wurde 1967 von L. Waldmann ¹⁴⁾ vorhergesagt und 1972 von Hulsman e.a. ¹⁵⁾ zuerst an N_2 beobachtet, Untersuchungen an mehreren anderen Gasen werden von Hermans e.a. ¹⁶⁾ durchgeführt. In Fig.10. ist das Schema der Anordnung gezeigt, und die Richtung des Druckgradienten für N_2 angegeben ¹⁵⁾; für CO hat ∇p die gleiche, für HD und CH_4 die umgekehrte Richtung wie für N_2 , entsprechend den Vorzeichen der g-Faktoren (siehe Tabelle 4) ¹⁵⁾ ¹⁶⁾.

Das Studium der thermomagnetischen Druckdifferenz bietet eine Möglichkeit, die Bedeutung der Gleiteffekte für die quantitative Erklärung des Scott-Effekts abzuschätzen ¹⁴⁾, da sie (wegen der ebenen Geometrie) allein durch Randeffekte hervorgerufen wird. In einem verdünnten, mehratomigen Gas zwischen parallelen Platten (Abstand $2d$) von verschiedener Temperatur (T_+ bzw. T_-) haben die Wärmeströme und der Tensorpolarisationsstrom bei Anwesenheit eines Magnetfelds Tangentialkomponenten, es gibt also (nach der Randbedingung (9.10)) an der Wand eine Gleitgeschwindigkeit, und dadurch entsteht auch ein tangentialer Druckunterschied, die thermomagnetische Druckdifferenz. Zu ihrer Berechnung wird eine Störungsrechnung (ähnlich zu der in Teil B) verwendet: Zunächst wird unter Vernachlässigung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die "isotrope" Temperaturverteilung T_{iso} berechnet, daraus werden die Tensorpolarisation $\underline{a}$ und ihr Strom $\underline{b}$ bestimmt und dann werden damit die Strömung und die Druckgradienten im Magnetfeld ermittelt. Bei allen nun folgenden Rechnungen wird die Gültigkeit von $D_z \gg D_x \gg D_y$ vorausgesetzt, sodaß statt des rechteckigen Kanals stets parallele, unendlich ausgedehnte Platten vom Abstand $D_y = 2d$ betrachtet werden können.

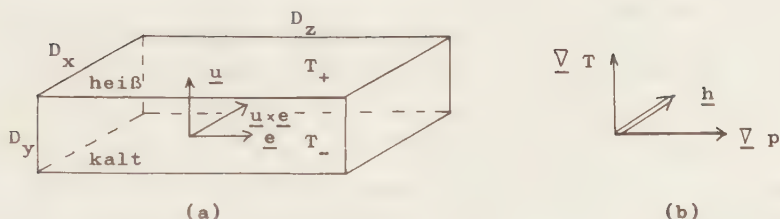


Fig.10. Zur Messung der thermomagnetischen Druckdifferenz;
 (a) Schema der Anordnung (b) Richtung des Druckgradienten für N_2 nach Hulsman e.a. 15).

(a) Die isotrope Temperaturverteilung

Ohne ein äußeres Magnetfeld ist das wärmeleitende Gas in Ruhe

$$\underline{v}(\underline{x}, \underline{H}=\underline{0}) = \underline{0} \quad , \quad (1)$$

und der Druck kann höchstens von $y = \underline{u} \cdot \underline{x}$ (siehe Fig.10.) abhängen

$$p(\underline{x}, \underline{H}=\underline{0}) = \tilde{p}(y) \quad ; \quad (2)$$

aufgrund der Differentialgleichung (5.11) für $\underline{v}$ wird $\tilde{p} - p_0$ durch die Anisotropiegrößen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ und durch die Differenztemperatur T' bestimmt. Der isotrope Anteil T'_{iso} der Differenztemperatur verschwindet nach Anhang V, wenn die Oberflächenkoeffizienten L_{22} und L_{12} in (8.2) vernachlässigt werden, dann muß aber wegen der Bedingung (8.12)

$L_{22} L_{33} - L_{23}^2 \gg 0$ auch L_{23} vernachlässigt werden (vergleiche auch (9.4)), also

$$T'_{iso} = 0$$

$$L_{22} = 0 = L_{12} = L_{23} \quad .$$

(3)

Da die Differenztemperatur für das Auftreten der thermomagnetischen Druckdifferenz nicht wesentlich ist, wird im Folgenden stets mit der Annahme (3) gearbeitet; dann können die ver-

einfachten Ansätze, Differentialgleichungen und Randbedingungen aus §9 verwendet werden.

Die Differentialgleichung (9.13) für die isotrope Temperaturverteilung $\nabla \cdot \nabla T_{\text{iso}} = 0$ hat mit $T_{\text{iso}} = T_{\text{iso}}(y)$ die Lösung

$$T_{\text{iso}}(y) = T_{\text{iso}}(0) + (T_+ - T_-) \frac{y}{2d} \frac{1}{\beta_0}.$$

Nach (8.5) gibt es hier ohne Magnetfeld keinen Oberflächenwärmestrom Q , aus (8.9) folgt dann $(q_{\text{solid}} \cdot \underline{n} = q \cdot \underline{n})_{H=0}$, somit gilt die Randbedingung (9.9):

$T_{\text{iso}} - T_{\text{solid}} = \frac{1}{\lambda_{\text{iso}}} C_t q_{\text{iso}} \cdot \underline{n}$. Mit $T_{\text{solid}}(+d) = T_+$ ergeben sich hieraus die beiden Konstanten zu

$T_{\text{iso}}(0) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-) = T_0$ und $\beta_0 = 1 + \frac{1}{d} C_t$, die Lösung ist demnach

$$T_{\text{iso}}(y) = \frac{T_+ + T_-}{2} + (T_+ - T_-) \frac{y}{2d} \frac{1}{1 + \frac{\ell}{d} C_t}. \quad (4)$$

Die Größe des Temperatursprungs wird also durch $\frac{1}{d} C_t$ bestimmt:

$$T_{\text{iso}}(-d) - T_- = T_+ - T_{\text{iso}}(+d) = (T_+ - T_-) \frac{\frac{1}{2} \frac{\ell}{d} C_t}{1 + \frac{\ell}{d} C_t}.$$

(b) Tensorpolarisation und Strom der Tensorpolarisation

Im Sinne der Störungsrechnung werden in die Inhomogenitäten der Differentialgleichung (9.15) und der Randbedingung (9.11) für die Tensorpolarisation die isotropen Werte für $\underline{v}$, $\underline{q}$ und $\underline{q}^{\text{tr}}$ eingesetzt. Mit (1) - (4), $p_{\text{iso}} = \text{const} = p_0$ und $\underline{k}_{\text{iso}}^{\text{tan}} = \underline{0}$ erhält man die homogene Differentialgleichung

$$(1 - L_m^2 \nabla \cdot \nabla) \underline{\mathcal{P}}^{(m)} : \underline{\underline{a}} = 0$$

und die inhomogene Randbedingung

$$\underline{\underline{a}} = C_a \underline{n} \cdot \underline{\underline{b}} + C_a t \frac{\ell}{T_0 \lambda_{\text{iso}}} q_{\text{iso}} \cdot \underline{n} \frac{3}{2} \overline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}$$

Werden nun die Größen $\underline{\underline{\tilde{a}}}$ und $\underline{\underline{\tilde{b}}}$ eingeführt durch

$$\underline{\underline{a}} = \tilde{\underline{\underline{a}}} \frac{\frac{L_0}{2d}}{1 + \frac{L_0}{d} C_t} \frac{T_+ - T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_\eta}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \quad , \quad (5)$$

$$\underline{\underline{b}} = \tilde{\underline{\underline{b}}} \frac{(-\frac{L_k}{2d})}{1 + \frac{L_0}{d} C_t} \frac{T_+ - T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_\eta}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \quad ,$$

so geht die Randbedingung über in (vergl. (11.2)) $\tilde{C}_a = C_a \sqrt{\frac{\omega_T}{\omega_k}}$

$$\tilde{\underline{\underline{a}}} = -\tilde{C}_a \underline{\underline{n}} \cdot \tilde{\underline{\underline{b}}} - \tilde{C}_{at} \underline{\underline{u}} \underline{\underline{n}} \quad ,$$

wobei $\tilde{C}_{at}$ definiert ist als

$$C_{at} = \tilde{C}_{at} \frac{L_0}{\ell} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_\eta}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \quad , \quad (6)$$

und nach (9.21) $\tilde{\underline{\underline{b}}}$ gegeben ist durch

$$\tilde{b}_{\lambda_1 \mu \nu} = \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}_{\mu \nu, \mu' \nu'}^{(m)} \frac{1}{1 + i m \varphi_k} \left(L_0 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \tilde{a}_{\mu' \nu'} - u_{\lambda'} \Delta_{\lambda' \lambda_1 \mu' \nu'}^{(2)} \right) . \quad (7)$$

Mit dem Ansatz $\mathcal{P}^{(m)} \cdot \tilde{\underline{\underline{a}}} = A_m(y) \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}}$ ergeben sich für $A_m(y)$ die Lösungen $\cosh \frac{y}{L_m}$ und $\sinh \frac{y}{L_m}$, von denen wegen der Symmetrie der Randbedingung (für $y = \pm d$ ist $\underline{\underline{n}} = \pm \underline{\underline{u}}$) nur $\sinh \frac{y}{L_m}$ in Frage kommt. Das Ergebnis ist also

$$\tilde{\underline{\underline{a}}} = \sum_{m=-2}^{+2} \mathcal{P}^{(m)} : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} \alpha_m \frac{\sinh(y/L_m)}{\sinh(d/L_m)} \quad , \quad (8)$$

und die Konstanten α_m ergeben sich zu

$$\alpha_m = \frac{\frac{\tilde{C}_a}{1 + i m \varphi_k} - \tilde{C}_{at}}{1 + \tilde{C}_a \sqrt{\frac{1 + i m \varphi_T}{1 + i m \varphi_k}} \coth(d/L_m)} \quad (9)$$

Die Tensorpolarisation $\underline{\underline{a}}$ verschwindet für hohen Druck, da sie die Knudsenzahl L_0/d als Faktor enthält; sie klingt vom Rand her auf einer Strecke $\sim L_0$ auf den Wert Null ab.

Nun kann der "Kaganvektor" $\underline{\tilde{B}}$ ($\tilde{B}_\mu = \tilde{b}_{\lambda_1 \lambda_2 \mu}$) aus (9.22) berechnet werden

$$\underline{\tilde{B}} = -\frac{5}{3} \left[\underline{\delta} - \underline{\lambda}(\varphi_k) \right] \cdot \underline{u} + \sum_{m=-2}^{+2} \underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u} \bar{\alpha}_m \cosh \frac{y}{L_m}, \quad (10)$$

dabei ist $\bar{\alpha}_m$ eine Abkürzung für $\bar{\alpha}_m = \alpha_m \sqrt{\frac{1+im\varphi_T}{1+im\varphi_K}} / \sinh \frac{d}{L_m}$;

der Kaganvektor bestimmt nach (9.10) die thermische Gleitung am Rand (über $\underline{q}^{\text{tr}}$) und kommt als Inhomogenität in der Differentialgleichung (9.14) für $\underline{v}$ vor ($\underline{a}_{kt}$ aus (3.7) wird nach (11.5) durch $\underline{a}_{Tt}$ ersetzt):

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \frac{c_0}{\sqrt{2}} (1-A_{ti})^{-1/2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_T}} a_{kt} (\underline{\nabla} \underline{\nabla} \cdot \underline{B} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{B}) = \\ = \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\ell_K/(2d)}{1+\ell_d/C_t} \frac{T_+-T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_T}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{K}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} a_{Tt} \frac{d^2}{dy^2} \underline{\tilde{B}}^{\text{tan}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Außerdem enthält (9.14) noch den Term

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\eta_{iso}} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \underline{\nabla} \cdot \underline{a} = \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\ell_K/(2d)}{1+\ell_d/C_t} \frac{T_+-T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_T}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{K}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \cdot \\ \cdot \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \frac{d^2}{dy^2} \sum_{m=-2}^{+2} \underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u} \frac{\bar{\alpha}_m}{1+im\varphi_T} \cosh \frac{y}{L_m}. \end{aligned} \quad (12)$$

Die thermomagnetische Gleitung wird in der Randbedingung (9.10) für $\underline{v}^{\text{tan}}$ beschrieben durch das Glied

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\sqrt{3}} C_{ma} (\underline{n} \cdot \underline{b} \cdot \underline{n})^{\text{tan}} = \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{\ell_K/(2d)}{1+\ell_d/C_t} \frac{T_+-T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_T}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{K}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \cdot \\ \cdot \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \hat{C}_{ma} \sum_{m=-2}^{+2} (\underline{u} \cdot \mathcal{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u})^{\text{tan}} \left(\frac{1}{1+im\varphi_K} - \bar{\alpha}_m \cosh \frac{d}{L_m} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

hierbei wurde (11.2) $C_{ma} = \hat{C}_{ma} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T}$ verwendet.

(c) Strömung im Magnetfeld

Aus der Annahme, daß die Geschwindigkeit $\underline{v}$ nur von y abhängt, folgt (wie in §11.(b), p.59) $\underline{u} \cdot \underline{v} \equiv 0$; die durch die Anisotropiegrößen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bestimmten Anteile T_1, T'_1 der

Temperaturen können ebenfalls nur von y abhängen, spielen also in der Differentialgleichung und Randbedingung für $\underline{v}$ keine Rolle. Der Druckgradient ist dann auch nur eine Funktion von y allein, die Tangentialkomponente $(\underline{\nabla} p)^{\tan}$ ist also konstant. Somit werden die folgenden Ansätze gemacht:

(14)

$$\begin{aligned}\underline{v}(x, H) &= \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{l_k/(2d)}{1 + l_d C_t} \frac{T_+ - T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_\eta}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \underline{V}(y, H) \\ \underline{\nabla} p &= \underline{u} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{3}{2} \frac{\eta_{iso}}{d^2} \frac{c_0}{\sqrt{3}} \frac{l_k/(2d)}{1 + l_d C_t} \frac{T_+ - T_-}{T_0} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_\eta}} \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} a_{ikt} \sqrt{2} \frac{\omega_{\eta T}}{\omega_T} \underline{P} \\ \underline{u} \cdot \underline{V} &= \sigma, \quad \underline{u} \cdot \underline{P} = \sigma, \quad \underline{P} = \underline{P}(H)\end{aligned}$$

Die experimentell zugängliche Größe ist der konstante tangentielle Druckgradient, daher wird das Hauptziel die Berechnung von $\underline{P}$ sein; auf die Bestimmung von $\partial p / \partial y$, T_1 und T_1' soll hier verzichtet werden.

Die Tangentialkomponente der Differentialgleichung (9.14)

$$\frac{d^2 \underline{V}}{dy^2} = -\frac{3}{2} \frac{1}{d^2} \underline{P} - \frac{d^2}{dy^2} \sum_{m=-2}^{+2} (\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u})^{\tan} \underline{\alpha}_m \left(\frac{1}{1 + im\varphi_T} + a_{Tt} \right) \cosh \frac{y}{L_m}$$

liefert für $\underline{V}$ die Lösung

(15)

$$\underline{V} = -\frac{3}{2} \underline{P} \frac{1}{2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 - \underline{R} - \sum_{m=-2}^{+2} (\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u})^{\tan} \underline{\alpha}_m \left(\frac{1}{1 + im\varphi_T} + a_{Tt} \right) \cosh \frac{y}{L_m};$$

$\underline{V}$ muß aufgrund der Randbedingung (9.10)

$$\begin{aligned}\underline{V}(\pm d, H) &= \frac{3}{2} \underline{P} \left(\frac{l}{d} C_m + \frac{2}{5} \frac{l_y l_t}{d^2} \right) - \frac{5}{3} a_{Tt} \left(\underline{\underline{\Lambda}}(\varphi_k) \cdot \underline{u} \right)^{\tan} + \\ &+ \sum_{m=-2}^{+2} (\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u})^{\tan} \left[\frac{\tilde{C}_{ma}}{1 + im\varphi_k} - \underline{\alpha}_m (\tilde{C}_{ma} + a_{Tt}) \cosh \frac{d}{L_m} \right]\end{aligned}$$

eine gerade Funktion von y sein; der konstante Tangentialvektor $\underline{R}$ ($\underline{u} \cdot \underline{R} = 0$) ergibt sich zu

$$\underline{R} = \frac{3}{4} \underline{P} \left(1 + 2 \frac{\ell}{d} \zeta_m + \frac{4}{5} \frac{\ell_g \ell_t}{d^2} \right) + \frac{5}{3} \alpha_{1t} \left(\Lambda (\varphi_m) \cdot u \right)^{\tan} \\ - \sum_{m=2}^{+2} \left(\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u} \right)^{\tan} \left[\frac{\hat{\zeta}_{ma}}{1 + i m \varphi_m} + \alpha_m \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} - \zeta_{ma} \right) \cosh \frac{d}{L_m} \right]. \quad (16)$$

Eine weitere Beziehung zwischen $\underline{R}$ und $\underline{P}$ leitet sich ab aus der Tatsache, daß im "Kanal" immer dieselbe Gasmenge enthalten ist, die mittlere Geschwindigkeit also verschwindet $\underline{V} = 0$:

$$\underline{R} = \frac{-1}{4} \underline{P} \sum_{m=2}^{+2} \left(\underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u} \right)^{\tan} \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} + \alpha_{1t} \right) \frac{L_m}{d} \sinh \frac{d}{L_m}. \quad (17)$$

Aus den beiden Gleichungen (16) und (17) folgt nun ein Ausdruck für $\underline{P}$:

$$\underline{P} = \frac{1}{1 + 3 \frac{\ell}{d} \zeta_m + \frac{4}{5} \frac{\ell_g \ell_t}{d^2}} \left[\frac{10}{3} \alpha_{1t} \left(\Lambda (\varphi_m) \cdot u \right)^{\tan} + \right. \\ \left. \left(\sum_{m=2}^{+2} \left(2 \underline{u} \cdot \underline{P}^{(m)} : \underline{u} \underline{u} \right)^{\tan} \left[\frac{\hat{\zeta}_{ma}}{1 + i m \varphi_m} - \alpha_m \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} - \zeta_{ma} \right) \cosh \frac{d}{L_m} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_m \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} + \alpha_{1t} \right) \frac{L_m}{d} \sinh \frac{d}{L_m} \right] \right]. \quad (18)$$

Gemessen werden die Druckunterschiede in der Längsrichtung $\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p$ des Kanals 15) 16) ; $\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p$ wird in der Form

$$\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p = - \frac{3}{2} \frac{\eta_{10}}{d^2} \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}} \frac{\ell_t}{2d} \frac{1}{L_m} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega \eta}} \sqrt{\frac{\hat{\zeta}_{10}}{\eta_{10}}} \alpha_{1t} \sqrt{2} \frac{\omega_{gt}}{\omega_1} \right) \quad (19)$$

geschrieben. Der Druckunterschied auf der Länge D_z ist

$\delta p = D_z \underline{e} \cdot \underline{\nabla} p$, mit $\delta T = T_+ - T_-$ ergibt sich für die von Hulsman o.a. 15) und Hermans o.a. 16) angegebene Größe $p_0 \delta p / \delta T$ der Ausdruck

$$\left[\frac{p_0 \delta p}{\delta T} = - A \zeta_t \zeta_{1t} F \right], \quad (20)$$

dabei bestimmt

$$A = \frac{D_z}{(2d)^3} g \sqrt{2} \frac{k}{M} \eta_{iso}^2 \sqrt{\frac{\lambda_{iso}}{\frac{15}{4} \frac{k}{M} \eta_{iso}}} \sqrt{\frac{\omega_\eta}{\omega_k}} \frac{|\omega_{\eta T}|}{\omega_T} |a_{ikt}| > 0 \quad (21)$$

die Größenordnung des Effekts. Aus den SBE - Daten der Viskosität und Wärmeleitfähigkeit in Tabelle 4 kann A berechnet werden. Genau wie in §4.(b) bezeichnen s_t und s_{it} die Vorzeichen von ω_{kt} (bezw. $\omega_{\eta T}$) und a_{ikt} .

Mit Hilfe der Formeln aus Anhang III erhält man (22)

$$F = \frac{1}{(1 + \frac{\ell}{d} c_t)(1 + 3 \frac{\ell}{d} c_m + \frac{6}{5} \frac{\ell \eta \ell_t}{d^2})} \left[(\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot \underline{u}) \left[a_{Tt} \left(\frac{\varphi_k^2}{1 + \varphi_k^2} - \frac{8 \varphi_k^2}{1 + 4 \varphi_k^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (\operatorname{Re} F_1 - F_0) 2(1 - 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2) - (\operatorname{Re} F_2 - F_0)(1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \right] \right. \\ \left. + \underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}) \left[a_{Tt} \left(\frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k^2} + \frac{4 \varphi_k}{1 + 4 \varphi_k^2} \right) + \operatorname{Im} F_1 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Im} F_2 (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2) \right] \right] \quad ,$$

wobei die komplexen Größen F_m gegeben sind durch (23)

$$F_m = - \frac{\hat{C}_{ma}}{1 + i m \varphi_k} - \frac{\frac{\tilde{C}_a}{1 + i m \varphi_k} - \tilde{C}_{at}}{\sqrt{\frac{1 + i m \varphi_k}{1 + i m \varphi_t}} + \tilde{C}_a \coth \frac{d}{L_m}} \left[\coth \frac{d}{L_m} \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} - \tilde{C}_{ma} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{1 + i m \varphi_t} + a_{Tt} \right) \frac{L_m}{d} \right] \quad , \quad (m = 0, 1, 2)$$

§17. Diskussion der Druckdifferenz

(a) Allgemeine Bemerkungen

Der Druckgradient enthält nach (19) die Knudsenzahl l_k/d als Faktor, verschwindet also für hohen Druck. Die Proportionalität zu $\omega_{\gamma\tau}$ und a_{ikt} zeigt den engen Zusammenhang mit dem Senftleben-Beenakker-Effekt der Viskosität und der Wärmeleitfähigkeit. Bei Abwesenheit eines Magnetfelds ist nach (22) $F = 0$, und somit auch $\underline{e} \cdot \underline{\nabla} p = 0$. Die thermomagnetische Druckdifferenz ist daher, ähnlich wie der Scott-Effekt, eine für verdünnte, mehratomige Gase im Magnetfeld typische Erscheinung. Im Unterschied zum Scott-Effekt ist jedoch die thermomagnetische Druckdifferenz ein reiner "Randeffekt", und zwar in folgendem Sinne: Wenn die phänomenologischen Koeffizienten $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{at}$ aus der Randbedingung für $\underline{a}$ Null gesetzt werden, so verschwindet nach (16.9) die Tensorpolarisation (wegen $\alpha_m = 0$), $\underline{a} = 0$. Nimmt man außerdem an, daß das Gas am Rand haftet, daß es also weder eine thermische noch eine thermomagnetische Gleitung gibt (dh. $\tilde{C}_{ma} = 0$), dann folgt aus (15) und $\underline{V}^{(d,H)} = \underline{0}$ $\underline{R} = -3/4 \underline{P}$, da aber wegen $\underline{V} = \underline{0}$ auch $\underline{R} = -1/4 \underline{P}$ sein soll, muß $\underline{R} = \underline{0} = \underline{P}$ sein, sowie $\underline{V} \equiv \underline{0}$. Es gibt also keinen Effekt.

Der zu μ_{Tt} proportionale Term in F , der keine phänomenologischen Oberflächenkoeffizienten enthält, geht zurück auf die thermische Gleitung $\sim -\frac{2}{5} \frac{1}{p_0} (q^{tr})^{\tan}$ in der Geschwindigkeitsrandbedingung. Das ist dann der einzige Beitrag zur thermomagnetischen Druckdifferenz, wenn man die Tensorpolarisation vernachlässigt ($\tilde{C}_a = 0 = \tilde{C}_{at}$), und die Kopplung von $\underline{v}^{\tan}$ mit dem Strom der Tensorpolarisation außer Acht läßt ($\tilde{C}_{ma} = 0$). In diesem Falle wäre $F_m = 0$, und die thermomagnetische Druckdifferenz wäre nach (16.22) allein durch die feldabhängigen Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_{||}-\lambda_{\perp}$ und λ_{transv} bestimmt.

Würde man $\tilde{C}_a = 0 = \tilde{C}_{at}$ setzen, jedoch $\tilde{C}_{ma} \neq 0$ zulassen, wie es der ursprünglichen Waldmannschen Theorie¹⁴⁾ entspricht, dann wäre F_m besonders einfach, nämlich

$$F_m - F_0 = \tilde{C}_{ma} \frac{m^2 \varphi_k^2 + i m \varphi_k}{1 + m^2 \varphi_k^2} \quad) \quad (1)$$

die Druckdifferenz hängt dann nur von φ_k ab, nicht von φ_T . Die thermische ($\sim a_{Tt}$) und die thermomagnetische Gleitung ($\sim \tilde{C}_{ma}$) liefern also gleichartige Beiträge zu δp , beispielsweise ist für $\underline{h} = \underline{ux_e}$ (wie es der Anordnung von Hulsman e.a. 15) entspricht)

$$\overline{T} = \frac{a_{Tt} \left(\frac{\varphi_k}{1+\varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1+4\varphi_k^2} \right) + \tilde{C}_{ma} \frac{2\varphi_k}{1+4\varphi_k^2}}{(1+\ell/d C_t)(1+3\ell/d C_m + 6/5 \ell \eta \ell_t / d^2)} \quad (2)$$

Bei Vernachlässigung der Tensorpolarisation ($\tilde{C}_a = 0 = \tilde{C}_{at}$) wird also die Größe von $p_0 \delta p / \delta T$ mit zunehmender Knudsenzahl $1/d$ einfach abnehmen, ohne daß sich (bei fester Richtung von $\underline{h}$) die Lage des Maximums oder des halben Sättigungswerts dabei ändert; das entspricht nicht der experimentellen Erfahrung¹⁶⁾. Der Faktor $1 + 1/d C_t$ beschreibt die Tatsache, daß der im verdünnten Gas wirksame Temperaturunterschied $T_{iso}(+d) - T_{iso}(-d)$ kleiner ist als $\delta T = T_+ - T_-$, der Faktor $1 + 3\ell/d C_m + \frac{6}{5} \ell \eta \ell_t / d^2$, daß sich aufgrund von Gleiteffekten ein geringerer Druckgradient ausbildet. Die zu L_m/d proportionalen Terme in F_m enthalten den Einfluß der Gas-Wand-Stöße auf die Tensorpolarisation, sie führen zu zusätzlichen Knudsen-Korrekturen, insbesondere zu einer "Dehnung der H/p_0 - Achse" (siehe dazu §12.(b)); für kleine L_m/d kann stets $\coth \frac{d}{L_m} = 1$ gesetzt werden.

Die beobachtete Druckdifferenz ist umgekehrt proportional zur dritten Potenz des Plattenabstands $2d$, sie ist direkt proportional zur Temperaturdifferenz $\delta T = T_+ - T_-$ zwischen den Platten, eine Umkehr des Temperaturgradienten ändert demnach das Vorzeichen des Druckgradienten.

(b) Winkelabhängigkeit

Die Größe des Druckunterschiedes δp und die Art der H/p_0 -Abhängigkeit ändern sich stark mit der Richtung $\underline{h}$ des Magnetfelds.

Der Einheitsvektor $\underline{h}$ werde charakterisiert durch den Polwinkel $\mathcal{J}$ (zur $\underline{e}$ -Achse) und den Azimutwinkel ϕ (zur $\underline{ux_e}$ -

Achse) :

$$\underline{h} \cdot \underline{e} = \cos \mathcal{J} \quad , \quad \underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}) = \sin \mathcal{J} \cos \phi \quad , \quad \underline{h} \cdot \underline{u} = \sin \mathcal{J} \sin \phi. (3)$$

Wenn nun $\underline{h}$ parallel zum Temperaturgradienten (dh. zu $\underline{u}$) oder zur Längsrichtung $\underline{e}$ des Kanals ist, verschwinden die beiden Faktoren $(\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot \underline{u}) = \frac{1}{2} \sin 2\mathcal{J} \sin \phi$ und $\underline{h} (\underline{u} \times \underline{e})$ in F , dann gibt es keinen Effekt:

$$\delta p = 0 \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \mathcal{J} = 0 \quad \text{oder} \quad \pi \\ \mathcal{J} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \phi = \frac{\pi}{2} \end{array} . \quad (4)$$

Ein "Longitudinaleffekt" liegt vor, wenn $\phi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3}{2} \pi$ ist, die H/p_0 - Abhängigkeit ist ähnlich der von $\lambda_{||}$ oder $\lambda_{\perp}$:

δp ist eine gerade Funktion von $\underline{h}$, dh. invariant gegen die Ersetzung $\underline{h} \rightarrow -\underline{h}$ ($\mathcal{J} \rightarrow \pi - \mathcal{J}$, $\phi \rightarrow \phi + \pi$), außerdem ist δp gerade in φ_k (und in φ_T) und somit unabhängig vom Vorzeichen des g -Faktors. Für hohe Felder, dh. $\varphi_k \gg 1$, wird ein Sättigungswert erreicht ($\sin \phi = \pm 1$)

$$F_{\text{sat}} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\mathcal{J} \sin \phi \left[-a_{Tt} + (F_{\infty} - F_0) (1 - 3 \sin^2 \mathcal{J}) \right]}{(1 + \ell/d C_t) (1 + 3 \ell/d C_m + b/5 \ell \eta \ell_t / d^2)} , \quad (5)$$

$$F_{\infty} \equiv F_1(\varphi_k \rightarrow \infty) = F_2(\varphi_k \rightarrow \infty) = \frac{-\tilde{C}_{at} \tilde{C}_{ma}}{\sqrt{K} + \tilde{C}_{\alpha}} ;$$

für $\sin^2 \mathcal{J} = \frac{1}{3}$ ($\mathcal{J} = 35^\circ 16'$) könnte man demnach aus dem Sättigungswert direkt die Größe a_{Tt} entnehmen.

Da die Ausdehnung des Kanals in $\underline{e}$ -Richtung relativ groß ist, kann der Apparat in Stellungen mit $\mathcal{J} \neq \frac{\pi}{2}$ vielleicht gar nicht zwischen den Polschuhen des Magneten untergebracht werden.

Bisher wurden Messungen nur für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$ gemacht; in den ersten Experimenten von Hulsman e.a.¹⁵⁾ war auch noch $\phi = 0$ bzw. π ($\underline{h} = \pm \underline{u} \times \underline{e}$), von Hermans e.a.¹⁶⁾ wird zur Zeit die Variation von δp mit dem Winkel ϕ untersucht.

Für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$ liegt ein "Transversaleffekt" vor, δp erreicht

für "mittlere" φ_k - Werte ein Maximum und verschwindet für große φ_k ; da δp ungerade in $\underline{h}$ ist, ändert die thermomagnetische Druckdifferenz das Vorzeichen, wenn das Magnetfeld umgepolt wird ($\underline{h} \rightarrow -\underline{h}$). Das Vorzeichen der Druckdifferenz hängt außerdem vom Vorzeichen des g -Faktors ab, da δp eine ungerade Funktion von φ_k ist: so wurde beobachtet ^{15) 16)}, daß δp für N_2 und CO (negativer g -Faktor) ein anderes Vorzeichen hat, wie für HD und CH_4 (positiver g -Faktor).

In diesem praktisch besonders wichtigen Fall hat F nach (16.22) die Gestalt

(6)

$$F = \frac{\cos \phi \left[a_{Tt} \left(\frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1 + 4\varphi_k^2} \right) + 2 \sin^2 \phi \mathcal{J}_m F_1 + \cos^2 \phi \mathcal{J}_m F_2 \right]}{(1 + \ell/d C_t) (1 + 3 \ell/d C_m + \frac{6}{5} \ell_y \ell_t / d^2)}$$

Wenn nur die thermische Gleitung berücksichtigt wird ($F_m = 0$), ist F proportional zu λ_{transv} , das Maximum wird also stets für $(\varphi_k)_{\text{tr}} = 0.6158$ erreicht unabhängig von ϕ , die Größe ist durch a_{Tt} bestimmt und nimmt mit zunehmendem ϕ ab wie $\cos \phi$. Wenn dagegen auch die Tensorpolarisation berücksichtigt wird, dann wird das Maximum von F i.a. bei niedrigeren φ_k - Werten ($< (\varphi_k)_{\text{tr}}$) liegen, da dann auch φ_T ($\varphi_k = \omega_T / \omega_K \varphi_T$) eine Rolle spielt und i.a. $\omega_T < \omega_K$ ist. Außerdem wird sich die Lage des Maximums bei Variation des Winkels ϕ verschieben, und zwar zu höheren φ_k - Werten hin, da die Beiträge von F_1 (einfacher Winkel φ_k) relativ zunehmen und die von F_2 (doppelter Winkel $2 \varphi_k$) relativ abnehmen. Die Winkelabhängigkeit der Größe von δp wird komplizierter sein als $\cos \phi$.

Die Bedeutung des Beitrags der Tensorpolarisation zur thermomagnetischen Druckdifferenz ergibt sich also

- i) aus der absoluten Größe von $p_0 \delta p / \delta T$,
- ii) aus der Lage des Maximums,
- iii) aus der Winkelabhängigkeit,
- iv) aus den Knudsen-Korrekturen, speziell aus der "Dehnung der H/p_0 - Achse".

§18. Vergleich mit dem Experiment

Die Ergebnisse der Rechnungen sollen nun verglichen werden mit den experimentellen Daten, die von Hermans e.a. ¹⁶⁾ für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ (siehe Fig.10., p.98) erhalten wurden. Für die Größe und Lage des Maximalwerts der Druckdifferenz wurden die auf hohe Drucke extrapolierten Werte $(\frac{P_0 \delta P}{\delta T})_{\max}^{\infty}$ und $(\frac{H}{P_0})_{\max}^{\infty}$ angegeben. Die Knudsen-Parameter n_{β} und n_{γ} wurden in einigen Fällen auch gemessen; sie haben dieselbe Bedeutung wie in §12,13 (siehe z.B. p.69): mit zunehmender Knudsenzahl vermindert sich die Größe von $\frac{P_0 \delta P}{\delta T}$ um den Faktor $1 + n_{\beta} \frac{1}{2} \frac{d}{d}$, das Maximum verschiebt sich relativ um $1 + n_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{d}{d}$ zu höheren $\frac{H}{P_0}$ - Werten hin. In Tabelle 11 sind die experimentellen Bedingungen und Ergebnisse zusammengefaßt für die Gase HD, CH₄, CO und N₂; für diese Gase sind die Oberflächenkoeffizienten $\tilde{C}_a$ und $\tilde{C}_{ma}$ bereits aus den Knudsen-Korrekturen zum SBE der Viskosität bestimmt worden (siehe z.B. Tabelle 8, p.80), sodaß lediglich $\tilde{C}_{at}$ als unbekannter Parameter bleibt.

Tabelle 11 : Experimentelle Bedingungen und Ergebnisse der Messung der thermomagnetischen Druckdifferenz nach L.J.F.Hermans e.a. ¹⁶⁾ für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ ($\underline{h} = \underline{u \times e}$).

	T_0 K	λ $\frac{10^{+4} \text{ erg}}{\text{cm s K}}$	η $\frac{10^{-4} \text{ g}}{\text{cm s}}$	$(\frac{H}{P_0})_{\max}^{\infty}$ $\frac{\text{k Oe}}{\text{torr}}$	$(\frac{P_0 \delta P}{\delta T})_{\max}^{\infty}$ $\frac{10^{-4} \text{ torr}^2}{\text{K}}$	n_{β}	n_{γ}
HD	295.8	a) *) 1.534	b) 1.059	1.21	- 1.82	33.0	4.0
CH ₄	303.3	c) 0.347	c) 1.123	3.83	- 0.333	28.0	---
CO	298.8	c) 0.251	c) 1.750	3.07	+ 2.08	18.0	---
N ₂	298.2	c) 0.2585	c) 1.773	2.48	+ 1.835	22.0	3.0

*) siehe Ref. 34)

Der Meßapparat besteht aus 20 hintereinandergeschalteten "Elementarzellen" (die schematisch in Fig.10.a), p.98 dargestellt sind) von je 17 cm Länge, also ist $D_z = 340$ cm; der Plattenabstand ist $D_y = 2d = 1.75$ mm. Die Breite D_x der Kanäle wurde nicht angegeben, hier soll jedoch angenommen werden, daß die Bedingung $D_z \gg D_x \gg D_y$ hinreichend gut erfüllt ist, sodaß die Resultate der Rechnungen für die unendlich ausgedehnten, parallelen Platten auf die Messungen im rechteckigen Kanal angewendet werden können.

Aus Fig.10.b) geht hervor ¹⁵⁾, daß $e \cdot \nabla p$ für N_2 positiv ist, wenn $\underline{h} = \underline{u} \times \underline{e}$ und $\nabla T = \frac{\delta T}{2} \frac{\underline{d}}{d} \underline{u}$, $\delta T > 0$ gilt, dann muß auch $\frac{P_0 \delta P}{\delta T} > 0$ sein. Da N_2 einen negativen g-Faktor hat ^{39d)} (siehe auch Tabelle 4 p.31), ist F negativ, denn für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$ ist F ungerade in φ_k : $\varphi_k = -|\varphi_k|$, $F(\varphi_k) = -F(|\varphi_k|)$; nach (16.20) muß dann $s_t s_{it} F$ positiv sein. Das Vorzeichen der thermomagnetischen Druckdifferenz hängt vom Vorzeichen des g-Faktors ab ¹⁵⁾, daher gilt bei der geschilderten Anordnung für alle Gase, daß $s_t s_{it} F > 0$ ist; speziell für HD , CH_4 , CO und N_2 ist nun $s_{it} = s_i$ (vergl. (4.16)), folglich gilt dann

$$\left. \begin{array}{l} s_t s_i F > 0 \\ \text{für } \underline{h} = \underline{u} \times \underline{e} \text{ und } \delta T > 0 \end{array} \right\} . \quad (1)$$

Zahlenwerte für die Größe A , welche nach (16.20) den Zusammenhang zwischen $\frac{P_0 \delta P}{\delta T}$ und $s_t s_{it} F$ herstellt, erhält man mit $D_z = 340$ cm, $2d = 1.75$ mm aus (16.21) und Tabelle 4, damit lassen sich aus den experimentellen Angaben für $\left(\frac{P_0 \delta P}{\delta T}\right)_{\max}^{\infty}$ und $\left(\frac{H}{P_0}\right)_{\max}^{\infty}$ die zugehörigen Werte von $s_t s_i F_{\max}$ und $(\varphi_k)_{\max}$ berechnen. Die Resultate sind in Tabelle 12 zusammengestellt, dort findet man auch die aus (11.5) mit Hilfe von Tabelle 4 berechnete Größe a_{Tt} .

Für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$ und $1/d = 0$ ergibt sich für F nach (17.6)

$$F = \cos \phi \left[F_2 + 2 \sin^2 \phi \operatorname{Im} F_1 + \cos^2 \phi \operatorname{Im} F_2 \right], \quad (2)$$

dabei ist

$$F_\lambda = a_{Tt} \left(\frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k^2} + \frac{4\varphi_k}{1 + 4\varphi_k^2} \right) \quad (3)$$

der von der thermischen Gleitung herkommende Beitrag der transversalen Wärmeleitfähigkeit λ_{transv} . Nach (16.23) lassen sich die mit der Tensorpolarisation zusammenhängenden Beiträge folgendermaßen schreiben:

$$\text{Im } F_m = F_a(m\varphi_k) + F_{ma}(m\varphi_k) + F_{at}(m\varphi_k) + F_{mat}(m\varphi_k), \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} F_a(m\varphi_k) &= -\tilde{C}_a \text{Im} \frac{1}{(1+im\varphi_k)(1+im\varphi_T)(\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1+im\varphi_k}{1+im\varphi_T}})} \\ F_{ma}(m\varphi_k) &= -\tilde{C}_{ma} \text{Im} \frac{1}{\sqrt{(1+im\varphi_k)(1+im\varphi_T)}(\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1+im\varphi_k}{1+im\varphi_T}})} \\ F_{at}(m\varphi_k) &= \tilde{C}_{at} \text{Im} \frac{1}{(1+im\varphi_T)(\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1+im\varphi_k}{1+im\varphi_T}})} \\ F_{mat}(m\varphi_k) &= -\tilde{C}_{ma} \tilde{C}_{at} \text{Im} \frac{1}{\tilde{C}_a + \sqrt{\frac{1+im\varphi_k}{1+im\varphi_T}}} \end{aligned} \quad (5)$$

wobei $\varphi_T = \frac{1}{K} \varphi_k$, $K = \omega_T / \omega_k$ einzusetzen ist.

Mit den schon bekannten Werten von $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ werden nun Lage $(\varphi_k)_{\text{max}}$ und Höhe (F_{max}) des Maximums von F in Abhängigkeit $\tilde{C}_{at}$ berechnet. Danach besteht ganz allgemein eine enge Korrelation zwischen F_{max} und $(\varphi_k)_{\text{max}}$ in dem Sinne, daß kleinere Werte von F_{max} (das sind für $s_i = -s_t$ größere Werte von $|F_{\text{max}}|$) zu größeren $(\varphi_k)_{\text{max}}$ - Werten gehören, dabei wird $(\varphi_k)_{\text{max}}$ mit zunehmendem $\tilde{C}_{at}$ größer. Das ist in Fig. 11. am Beispiel von HD gezeigt. Kleinere Werte von $\tilde{C}_a$ führen zu größeren Werten von $(\varphi_k)_{\text{max}}$; wenn $\tilde{C}_a = 0$ ist, muß nach der Bedingung (9.6), $C_a C_t - \frac{1}{2} C_{at}^2 > 0$, auch $\tilde{C}_{at} = 0$ sein, also sind $F_a = 0 = F_{at} = F_{mat}$ und

$$F_{ma}(m\varphi_k) = \tilde{C}_{ma} \frac{m\varphi_k}{1 + (m\varphi_k)^2},$$

und für $\phi = 0$ spielt nur $F(2\varphi_k)$ eine Rolle, F hat die in (17.2) angegebene Form. Die Lage des Maximums von F ist dann
($\rightarrow$ p. 114)

Tabelle 12 : Vergleich der experimentellen und theoretischen Ergebnisse für die thermomagnetische Druckdifferenz im Falle $\hat{J} = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ und $1/d = 0$, unter Verwendung von Tabelle 11 und Tabelle 8.

	$k = \frac{\omega_I}{\omega_K}$	a_{Tt} $s_I = s_t$ $s_I = -s_t$	A $\frac{10^{-4} \text{ torr}^2}{K}$	experiment. $P_0 \rightarrow \infty$ $(\varphi)_{\max}$ $s_I s_t F_{\max}$	$\tilde{C}_a$	$\tilde{C}_{ma}$	$s_I = s_t$ $\tilde{C}_{at}$ $(\varphi)_{\max}$ $F_{\max}$	$s_I = -s_t$ $\tilde{C}_{at}$ $(\varphi)_{\max}$ $F_{\max}$
HD	0.16	0.043 0.020	11.25	0.42 0.162	0.30 0.40	0.45 0.40	0.32 0.37 0.162	0.88 0.103 -0.163
CH ₄	0.56	0.303 0.041	0.59	0.36 0.563	0.60 0.00	0.00 0.08	0.37 0.562	2.65 0.405 -0.564
CO	0.64	0.431 0.102	3.04	0.39 0.684	1.10 0.00	0.00 0.66	0.38 0.684	3.30 0.547 -0.672
N ₂	0.47	0.337 0.074	3.24	0.34 0.566	1.00 0.00	0.00 0.44	0.35 0.567	2.98 0.440 -0.567

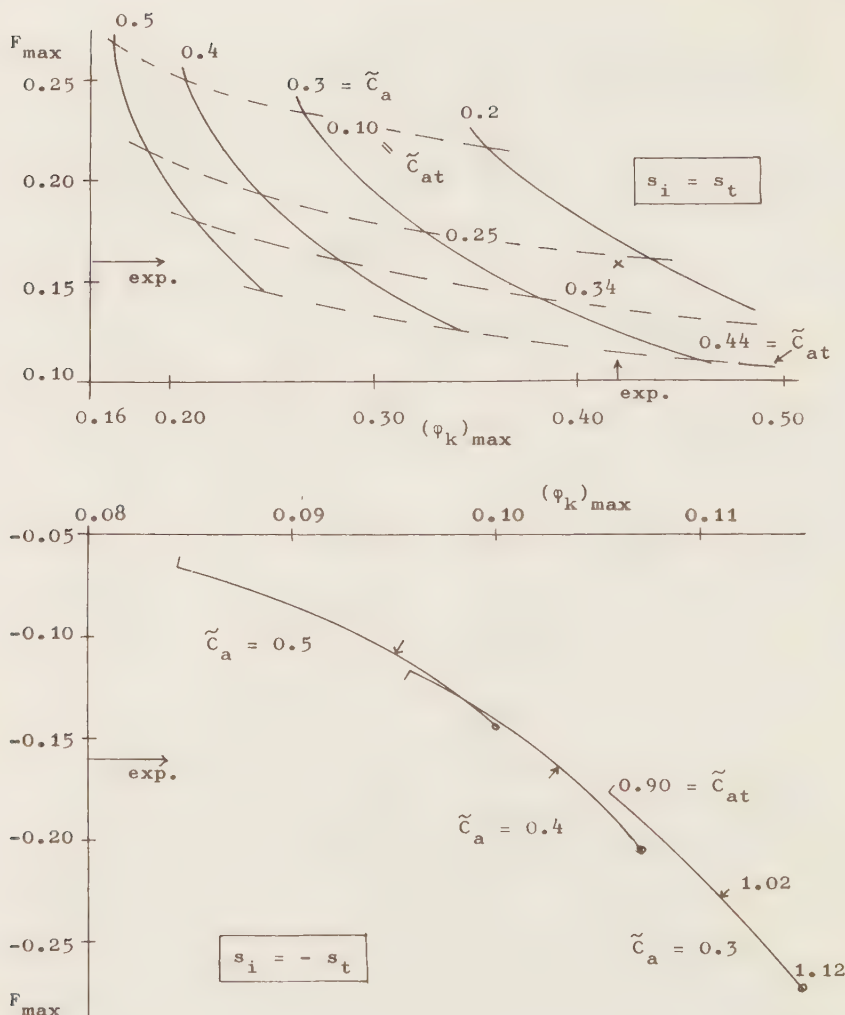


Fig.11. Höhe und Lage des Maximums von F für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ und $1/d = 0$, berechnet aus (2) - (5) für HD mit $\tilde{C}_{ma} = 0.4$. Für den Fall, daß $s_i = s_t$ ist, sind die zu gleichem $\tilde{C}_{at}$ gehörenden Punkte durch gestrichelte Linien verbunden, für $s_i = -s_t$ sind gleiche $\tilde{C}_{at}$ gleichartig markiert. Dabei bezeichnet s_t das Vorzeichen von ω_{kt} (und $\omega_{\eta r}$), s_i das von ω_{ki} .

durch $(\varphi_k)_{tr} = 0.6158$ (von F_λ) und $\varphi_k = 0.5$ (von F_{ma}) bestimmt. Ganz allgemein nimmt $(\varphi_k)_{max}$ zu mit größer werdendem $\tilde{C}_{ma}$.

Nach Fig. 11. kann im Falle von HD der experimentelle Wert von $(\varphi_k)_{max}$ durch die vorliegende Theorie für $s_i = -s_t$ nicht erklärt werden; für $s_i = s_t$ dagegen liegen die theoretischen Werte für $(\varphi_k)_{max}$ sehr viel näher an dem experimentellen Wert. Aus Tabelle 12 geht hervor, daß auch für die Gase CH_4 , CO und N_2 die Annahme $s_i = s_t$ zu besserer Übereinstimmung mit dem Experiment führt (am wenigsten ausgeprägt ist der Unterschied bei CH_4). Demnach ist es nach der hier entwickelten Theorie der thermomagnetischen Druckdifferenz wahrscheinlich, daß für die betrachteten Gase

$$\boxed{s_i = s_t} \quad (6)$$

ist, was auch von Levi, Mc Court und Beenakker ¹³⁾ bei ihrer Erklärung des Scott-Effekts angenommen wurde.

Die verschiedenen Beiträge zu F sind für $\phi = 0$, $1/d = 0$ in Fig. 12. am Beispiel von HD und N_2 gezeichnet. Die Kurve $F(\varphi_k)$ ist für HD (in Übereinstimmung mit dem Experiment ¹⁶⁾) relativ breit, da sie aus vielen Beiträgen besteht; die Lage des Maximums kann also experimentell nicht sehr genau bestimmt werden. Der maximale Wert von F_λ wird bei $(\varphi_k)_{tr} = 0.6158$ erreicht und macht bei HD etwa 38 % des Werts von F_{max} aus, bei N_2 sind es 85 %, bei CO 90 % und bei CH_4 ist $(F_\lambda)_{max}$ sogar um 4 % größer als F_{max} . Daher könnte für CH_4 , CO und N_2 die Größe der thermomagnetischen Druckdifferenz praktisch allein durch den Beitrag F_λ der thermischen Gleitung erklärt werden, die Lage des Maximums stimmt jedoch in keinem Fall mit $(\varphi_k)_{tr}$ überein, $(\varphi_k)_{max}$ ist stets kleiner. Das kommt von den Beiträgen der Tensorpolarisation her: das Maximum von η_4 wird für $\varphi_T = 0.5$, dh. $(\varphi_k)_{\eta_4} = 0.5$ erreicht, dadurch ist im Wesentlichen die Lage des Maximums der Funktionen F_a und F_{at} bestimmt. Für die Gase

	HD	CH_4	CO	N_2	gilt speziell
$(\varphi_k)_{max} =$	0.42	0.36	0.39	0.34	(7)
$(\varphi_k)_{\eta_4} =$	0.08	0.28	0.32	0.24	(→ p. 116)

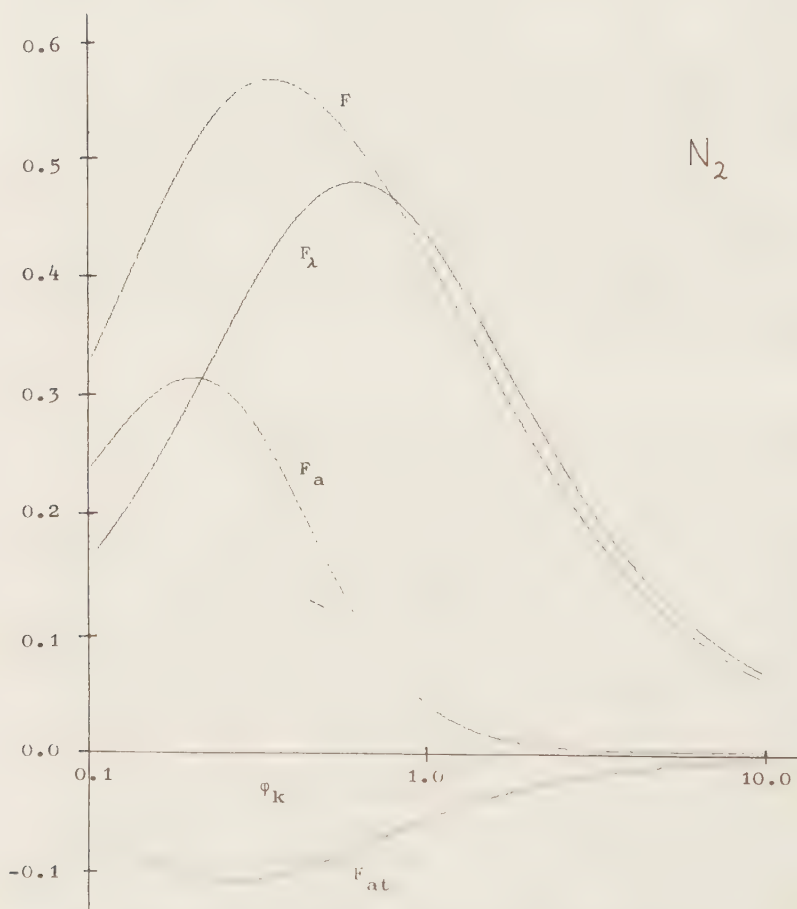


Fig.12. Die verschiedenen Beiträge zur thermomagnetischen Druckdifferenz für $\mathcal{N} = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ und $1/d = 0$, berechnet aus (2) - (5)

(a) für N_2 mit den Parametern $\tilde{C}_a = 1.0$, $\tilde{C}_{ma} = 0.0$, $\tilde{C}_{at} = 0.44$ und der Annahme $s_i = s_t$;

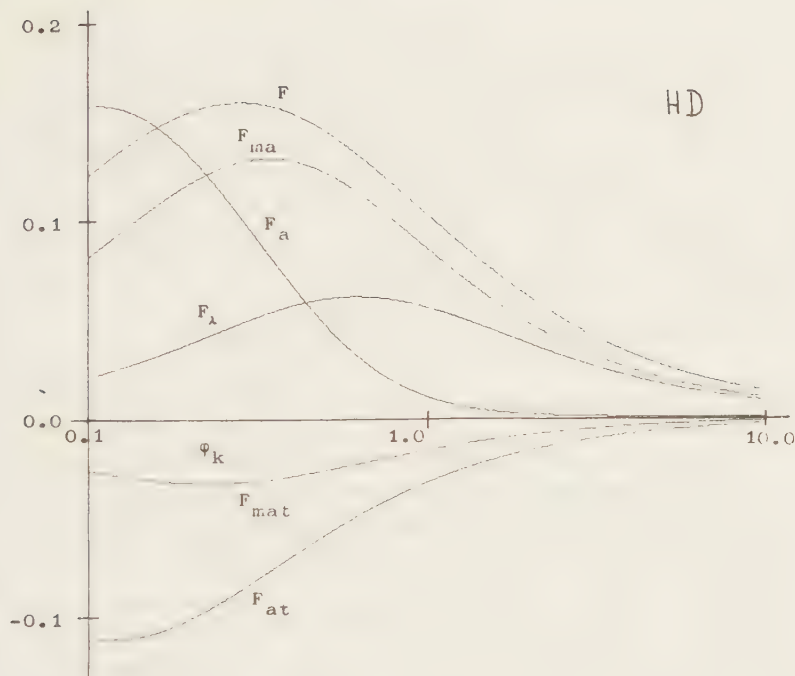


Fig. 12. (b) für HD mit den Parametern $\tilde{C}_a = 0.4$, $\tilde{C}_{ma} = 0.4$, $\tilde{C}_{at} = 0.34$ und der Annahme $s_i = s_t$.

also liegt $(\varphi_k)_{\max}$ stets zwischen $(\varphi_k)_{\eta_4}$ und $(\varphi_k)_{tr} = 0.6158$, für CH_4 , CO und N_2 sogar näher an $(\varphi_k)_{\eta_4}$.

Mit den Parametern C_m , $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ aus Tabelle 8, p.80 und dem soeben bestimmten $\tilde{C}_{at}$ kann die in 1/d lineare Korrektur an F aus (16.22,23) berechnet werden. Wird C_t so gewählt, daß sich der experimentelle Wert von n_β ergibt, dann sind die dazu gehörigen theoretischen Werte von n_γ höchstens halb so groß wie die experimentellen. Beispielsweise ist im Falle von HD (für $s_i = s_t$) $C_m = 1.0$, $\tilde{C}_a = 0.4$, $\tilde{C}_{ma} = 0.4$, $\tilde{C}_{at} = 0.34$ und $(n_\beta)_{\text{exp}} = 33.0 = (n_\beta)_{\text{theor}}$ für $C_t = 13.8$, dann ist $(n_\gamma)_{\text{theor}} = 1.44$, während $(n_\gamma)_{\text{exp}} = 4.0$ ist. Diese Tat-

sache und der recht große Wert für C_t sind vermutlich auf die Vernachlässigung der Differenztemperatur zurückzuführen, nach Anhang V tritt dann nämlich anstelle von C_t der Koeffizient $\tilde{C}$ auf, der Beiträge enthält, die den Randwert von T' bestimmen. Man kann $\tilde{C} > C_t$ durch $C_{12} = 0$ und $C_{22} > 0$ erklären (siehe Anhang V). Darüberhinaus wäre bei Berücksichtigung von T' in der Differentialgleichung für die Tensorpolarisation eine Inhomogenität

$$\sim \overline{u} \underline{u} \quad T'_{iso}(y) = T'_{iso}(d) \quad \overline{u} \underline{u} \quad \sinh \frac{y}{L_T} / \sinh \frac{d}{L_T},$$

aufgetreten, die zu Beiträgen $\sim \frac{\sinh y/L_T - \sinh y/L_m}{(1 - L_m^2/L_T^2) \sinh d/L_T}$

in der Tensorpolarisation geführt hätte. Damit ist plausibel, daß die Vernachlässigung von T' auch die Knudsen-Korrekturen $\sim n_K$ beeinflusst. Aus diesem Grund sollen hier die Knudsen-Korrekturen an $\frac{P_D \delta_P}{\delta T}$ nicht weiter betrachtet werden.

Nun soll für $1/d = 0$ die Abhängigkeit der thermomagnetischen Druckdifferenz vom Winkel ϕ bei festem $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$ untersucht werden, dabei wird sich der Einfluß der Tensorpolarisation besonders deutlich zeigen. Das ist nach Fig.13. sehr gut für HD zu sehen: mit zunehmendem ϕ wird $F_{\max}$ zunächst sogar größer und nimmt für $\phi > \frac{\pi}{4}$ stark ab. Wenn nur die thermische Gleitung eine Rolle spielen würde, wäre $F = \cos \phi \ F_\lambda$, dh. F nähme monoton ab wie $\cos \phi$, das Maximum wurde stets bei $(\varphi_K)_{tr} = 0.6158$ erreicht. Dagegen wird bei Berücksichtigung der Tensorpolarisation $(\varphi_K)_{\max}$ mit zunehmendem ϕ größer, da dann mit $\text{Im } F_1$ der einfache Winkel φ_K zunehmend wichtiger wird. Quantitative Ergebnisse zur Winkelabhängigkeit liegen mir noch nicht vor, mir ist nur qualitativ soviel bekannt, daß sich $F_{\max}$ komplizierter als $\cos \phi$ ändert; die Messungen werden zur Zeit von Hermans e.a. durchgeführt. In Fig.14. ist die Funktion $F(\varphi_K)$ für einige Winkel ϕ (und $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$, $1/d = 0$) aufgetragen für das Gas N_2 .

Nun sollen noch einige Bemerkungen zur Abhängigkeit der thermomagnetischen Druckdifferenz vom Winkel $\mathcal{J}$ bei festem $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $1/d = 0$ gemacht werden. Nach Fig.15. (für N_2) erreicht F den Sättigungswert nicht monoton mit wachsendem φ_K sondern

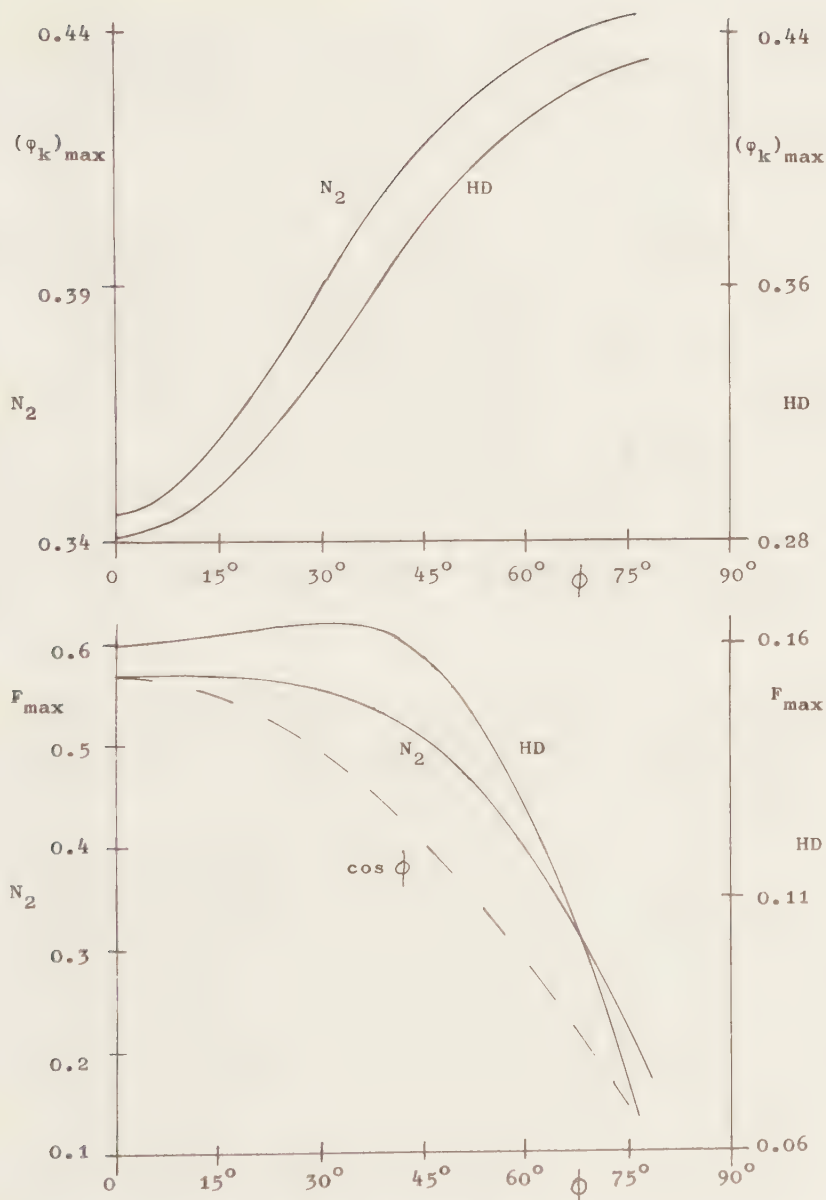


Fig.13. Höhe und Lage des Maximums von F für $\vartheta = \pi/2$, $1/d=0$ in Abhängigkeit von ϕ , berechnet aus (2) - (5) für N_2 und $\rightarrow$ HD

(Fig.13.)

mit den Parametern $\tilde{C}_a = \begin{matrix} 1.0 \\ 0.4 \end{matrix}$, $\tilde{C}_{ma} = \begin{matrix} 0.0 \\ 0.4 \end{matrix}$, $\tilde{C}_{at} = \begin{matrix} 0.44 \\ 0.34 \end{matrix}$ für $\begin{matrix} N_2 \\ HD \end{matrix}$

und der Annahme $s_i = s_t$. Die rechten Skalen gelten für HD, die linken für N_2 .

über ein Maximum, das ist möglich, da F eine Überlagerung mehrerer "monotoner Longitudinaleffekte" verschiedenen Vorzeichens ist (vergl. auch Fig.12.). Die thermomagnetische Druckdifferenz ist am größten, wenn $\mathcal{J}$ etwa 60° ist; das ist verständlich, wenn man den Sättigungswert F_{sat} aus (17.5) betrachtet: $\sin 2\mathcal{J}$ ist maximal, wenn $\mathcal{J} = 45^\circ$ ist, die Funktion $\sin 2\mathcal{J} (1 - 3 \sin^2 \mathcal{J})$ ist maximal für $\mathcal{J} \approx 64.5^\circ$. Die Maxima und Sättigungswerte für HD, CH_4 , CO und N_2 sind für $\mathcal{J} = 60^\circ$ in Tabelle 13 angegeben. Wegen der großen Ausdehnung der Meßapparatur in e -Richtung ist es jedoch zweifelhaft, ob das Experiment für $\mathcal{J} \neq \frac{\pi}{2}$ überhaupt durchgeführt werden kann!

Tabelle 13 : Die Maxima und Sättigungswerte der thermomagnetischen Druckdifferenz für $\mathcal{J} = \frac{\pi}{3}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $1/d = 0$ und $s_i = s_t$, berechnet aus (16.22,23). Für HD treten Maxima nur für kleinere $\mathcal{J}$ auf.

	$\tilde{C}_a$	$\tilde{C}_{ma}$	$\tilde{C}_{at}$	Maximum		Sättig.	Maximum		Sättig.
				φ_k	F	F_{sat}	H/p_0 $\frac{k Oe}{torr}$	$p_0 \frac{\delta p}{\delta T}$ $\frac{10^{-4} torr^2}{K}$	
HD	0.30	0.45	0.32	---	---	-0.146	---	---	1.64
	0.40	0.40	0.34			-0.157			1.77
CH_4	0.60	0.00	0.08	1.26	-0.349	-0.309	13.50	0.206	0.18
CO	1.10	0.00	0.66	1.09	-0.390	-0.303	8.65	1.185	0.92
N_2	1.00	0.00	0.44	1.09	-0.362	-0.300	8.02	1.176	0.97

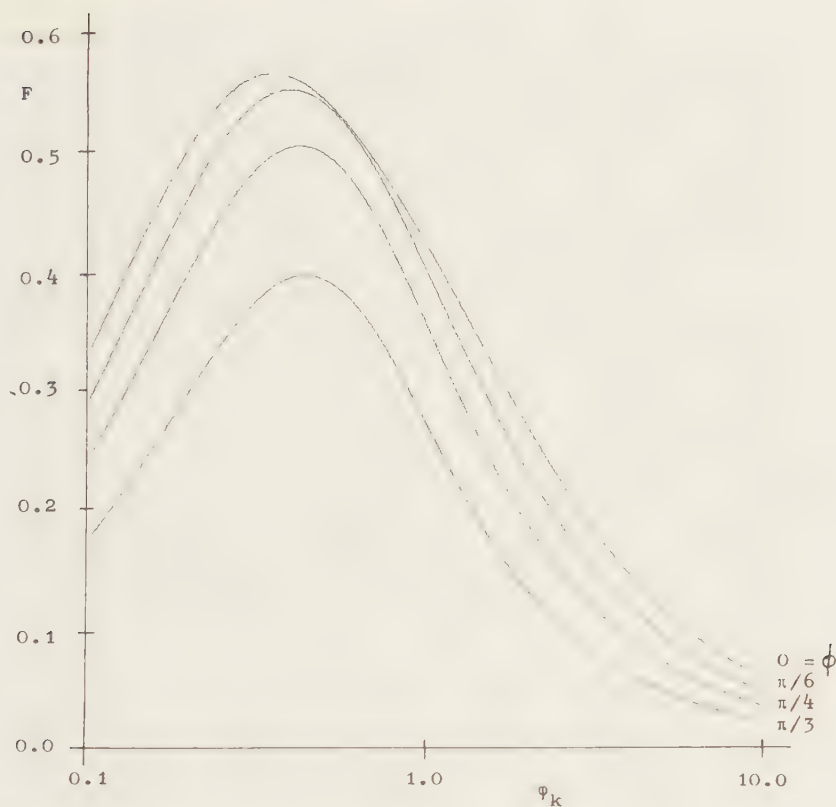


Fig.14. Die Abhängigkeit der thermomagnetischen Druckdifferenz vom Winkel ϕ bei festem $\mathcal{J} = \pi/2$ und $1/d = 0$, berechnet aus (2) - (5) für N_2 mit den Parametern $\tilde{C}_a = 1.0$, $\tilde{C}_{ma} = 0.0$, $\tilde{C}_{at} = 0.44$ und der Annahme $s_i = s_t$.

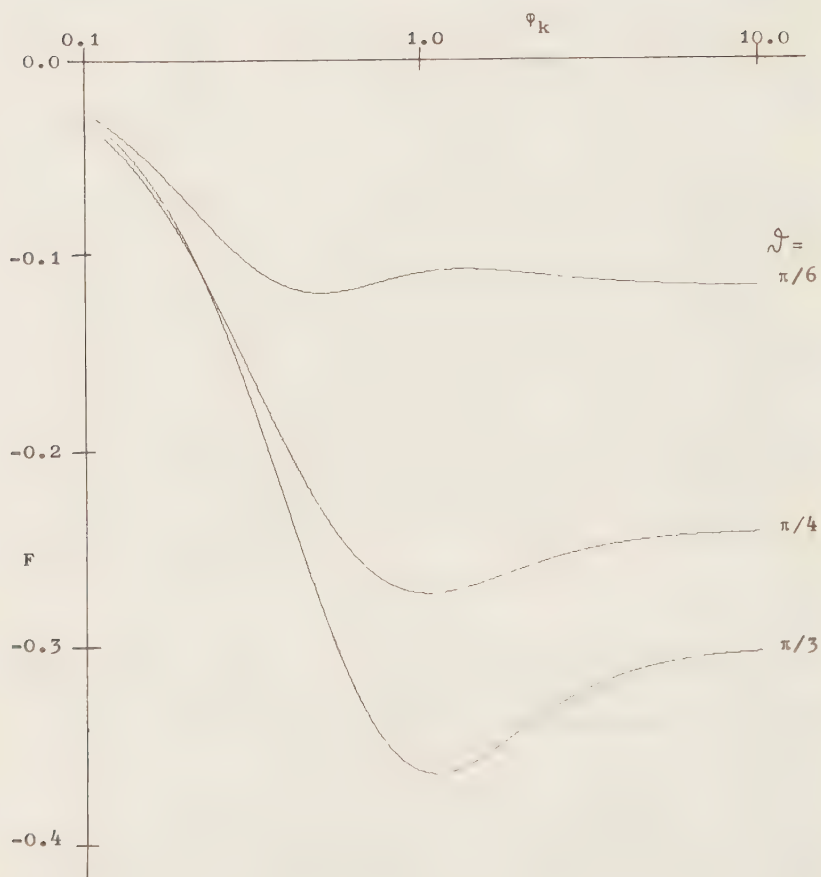


Fig. 15. Die Abhängigkeit der thermomagnetischen Druckdifferenz vom Winkel $\mathcal{J}$ bei festem $\phi = \pi/2$ und $1/d = 0$, berechnet aus (2) - (5) für N_2 mit den Parametern $\tilde{C}_a = 1.0$, $\tilde{C}_{ma} = 0.0$, $\tilde{C}_{at} = 0.44$ und der Annahme $s_i = s_t$.

Zum Schluß sind in Tabelle 14 die Zahlenwerte für die in der Randbedingung für die Tensorpolarisation vorkommenden Oberflächenparameter C_a , C_{ma} und C_{at} zusammengestellt; die Beziehungen (11.2) und (16.6) zu $\tilde{C}_a$, $\tilde{C}_{ma}$ und $\tilde{C}_{at}$ wurden dabei verwendet. Der Parameter C_a beschreibt die Akkomodation der Tensorpolarisation und ist von der Größenordnung "1"; in der Theorie von J. Halbritter²⁰⁾ wurde C_a durch Akkomodationskoeffizienten ausgedrückt, die unten angegebenen Zahlenwerte konnten in etwa erklärt werden.

Die Parameter C_{at} und $C_{am} = -C_{ma}$ sind verantwortlich für die Kopplung des Randwerts der Tensorpolarisation an die Wärmeströme und Kräfte des Gases am Rand, sie sind um eine bis zwei Größenordnungen kleiner als C_a . Nach J. Halbritter²⁰⁾ hängt C_{ma} mit der "Nichtsphärizität" der Wechselwirkung zwischen dem Gasmolekül und der Wand zusammen. Der Vergleich von Tabelle 14 mit Tabelle 4, p.31, zeigt, daß C_{am} und C_{at} etwa die gleiche Größenordnung haben wie die entsprechenden nichtdiagonalen Relaxationskonstanten im Gasinneren $\omega_{\tau\eta} / \omega_\eta$ und a_{ikt} .

Tabelle 14 : Ausgewählte Werte für die Oberflächenkoeffizienten C_a , C_{ma} und C_{at} in der Randbedingung für die Tensorpolarisation; s_t ist das Vorzeichen von $\omega_{\kappa t}$ (und $\omega_{\eta\tau}$), s_i das Vorzeichen von $\omega_{\kappa i}$, nach (6) ist wahrscheinlich $s_i = s_t$.

	$\tilde{C}_a$	$\tilde{C}_{ma}$	$\tilde{C}_{at}$ $s_i=s_t$ $s_i=-s_t$	C_a	C_{ma}	C_{at} $s_i=s_t$ $s_i=-s_t$
HD	0.40	0.40	0.34 1.02	1.00	$s_t \cdot 0.07$	$s_t \cdot 0.043$ $-s_t \cdot 0.128$
CH ₄	0.60	0.00	0.08 2.65	0.80	0.00	$s_t \cdot 0.005$ $-s_t \cdot 0.165$
CO	1.10	0.00	0.66 3.30	1.38	0.00	$s_t \cdot 0.072$ $-s_t \cdot 0.358$
N ₂	1.00	0.00	0.44 2.98	1.46	0.00	$s_t \cdot 0.056$ $-s_t \cdot 0.382$

A N H A N G

I. Die verschiedenen Definitionen des Entwicklungstensors $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$

In Tabelle 1 wurde der aus J aufgebaute Entwicklungstensor $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$, dessen Mittelwert die Tensorpolarisation $a_{\mu\nu}$ ist, in der Form

$$\phi_{\mu\nu}^{(2)} = \sqrt{\frac{45}{2}} R(J^2) \overline{J_\mu J_\nu} \quad (1)$$

geschrieben; aus der Normierungsbedingung für $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$

$$\langle \phi_{\mu\nu}^{(2)} \phi_{\mu'\nu'}^{(2)} \rangle_0 = \Delta_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(2)} \quad (2)$$

ergibt sich für $R(J^2)$ die Bedingung

$$\langle R^2 J^2 (J^2 - \frac{3}{4}) \rangle_0 = 1 \quad (3)$$

Es gibt also viele Möglichkeiten für $R(J^2)$, einige davon sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$R(J^2)$	Autoren	Arbeit über
$(\langle J^2 (J^2 - \frac{3}{4}) \rangle_0)^{-1/2}$	Mc Court, Snider ²⁹⁾ Raum, Köhler ⁴⁾	SBE
$(J^2 - \frac{3}{4})^{-1} (\langle J^2 (J^2 - \frac{3}{4}) \rangle_0)^{-1/2}$	Hess ⁶⁾	Strömungsdoppelbr. depolarisierte Rayleigh-Streuung
$(J^2 (J^2 - \frac{3}{4}))^{-1/2}$	Hess ⁷⁾	depolarisierte Rayleigh-Streuung

Für die bisher angegebenen Entwicklungstensoren $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$ gilt nur die Normierung (2) über die ganze j-Gesamtheit, dagegen sind die in den Arbeiten von W.E. Köhler ²³⁾ und W.E. Köhler, S. Hess and L. Waldmann (Z.Naturforsch. 25a, 336(1970)) verwendeten Tensoren $S_{\mu\nu}^{\dagger}$ ($\neq 0$ nur für $j \geq 1$)

$$S_{\mu\nu}^j = \sqrt{\frac{15}{2}} \left[j(j+1)(j(j+1) - \frac{3}{4}) \right]^{-1/2} P^j \overline{J}_\mu J_\nu P^j$$

im $(2j + 1)$ -dimensionalen Unterraum normiert

$$\text{tr} (S_{\mu\nu}^j S_{\mu'\nu'}^j) = (2j+1) \Delta_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(2)} \quad ; \quad (4)$$

dabei bedeutet P^j den Projektionsoperator in diesen Unterraum. Durch $S_{\mu\nu}^j$ ist auch $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$ bestimmt gemäß

$$P^j \phi_{\mu\nu}^{(2)} P^j = \alpha S_{\mu\nu}^j \quad ,$$

der Faktor α ergibt sich aus (4) und (2) zu ²³⁾

$$\alpha = \left[\frac{Q}{\sum_{j \geq 1} (2j+1) \exp(-E_j/kT_0)} \right]^{1/2} .$$

Q ist die rotatorische Zustandssumme.

Die spezielle Wahl des Entwicklungstensors $\phi_{\mu\nu}^{(2)}$ spielt eine Rolle bei der Berechnung der Relaxationskonstanten ω_T und $\omega_{\eta T}$ aus einem Molekülpotential ²³⁾, hat aber keinen Einfluß auf die Gestalt der Transport-Relaxations-Gleichungen.

II. Einige Eigenschaften der Projektionstensoren 2l-ter Stufe

Hier sollen, in etwas verallgemeinerter Form, einige Ergebnisse aus dem Anhang von Ref. 27) zusammengestellt werden. Die infinitesimale Drehung eines Tensors 1. Stufe (Vektor) um die Richtung $\underline{h}$ wird durch den Tensor 2. Stufe $\underline{H}$ beschrieben:

$$H_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_\lambda \equiv \varphi_{h\mu\nu}^{(1)} \quad , \quad (1)$$

$\varepsilon_{\mu\lambda\nu}$ ist der total antisymmetrische, isotrope Tensor 3. Stufe, mit $\varepsilon_{123} = 1$. Der Tensor 2l-ter Stufe

$$\varphi_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell)} \equiv \sum_{k=1}^{\ell} H_{\mu_k \mu'_k} \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^{\ell} \delta_{\mu_m \mu'_m} \quad (2)$$

beschreibt dann die Drehung eines Tensors l-ter Stufe ($l \geq 1$)

um $\underline{h}$. Aus $\underline{H}^3 + \underline{H} = 0$ erhält man die Hamilton-Cayley-Gleichung

$$\prod_{m=-\ell}^{+\ell} (\varphi_{h\mu\nu}^{(\ell)} - i m \varphi^{(\ell)}) = 0 \quad , \quad (3)$$

wobei $\mathbb{1}_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell)} = \prod_{k=1}^{\ell} \delta_{\mu_k \mu'_k}$ der "Einheitstensor"

2l-ter Stufe ist. Dann haben die Projektionstensoren

$$p^{(\ell, m)} \equiv \prod_{\substack{m'=-\ell \\ (\neq m)}}^{+\ell} \frac{(\mathbb{h}_g^{(\ell)} - i m' \mathbb{1}^{(\ell)})}{i(m-m')} , \quad (-\ell \leq m \leq +\ell) \quad (4)$$

die folgenden Eigenschaften:

$$\mathbb{h}_g^{(\ell)} \cdot p^{(\ell, m)} = i m p^{(\ell, m)} = p^{(\ell, m)} \cdot \mathbb{h}_g^{(\ell)} , \quad (5)$$

$$p^{(\ell, m)} \cdot p^{(\ell, m')} = \delta_{mm'} p^{(\ell, m)} , \quad (6)$$

$$\sum_{m=-\ell}^{+\ell} p^{(\ell, m)} = \mathbb{1}^{(\ell)} . \quad (7)$$

Andererseits sind durch (5), (6), (7) die $p^{(\ell, m)}$ eindeutig bestimmt.

In der vorliegenden Arbeit kommen nur die Tensoren zu $\ell = 1$ und $\ell = 2$ vor; sie werden abkürzend folgendermaßen bezeichnet:

$$\underline{\underline{H}} \equiv \mathbb{h}_g^{(1)} , \quad \underline{\underline{P}}^{(m)} \equiv p^{(1, m)} \quad (m=0, \pm 1) , \quad \underline{\underline{H}} \equiv \mathbb{h}_g^{(2)} , \quad \underline{\underline{P}}^{(m)} \equiv p^{(2, m)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2) .$$

Die Projektionstensoren zu $\ell = 1$ sind aus den drei Tensoren

$\underline{\underline{P}}^{\parallel} = \underline{\underline{h}} \underline{\underline{h}}$, $\underline{\underline{P}}^{\perp} = \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{h}} \underline{\underline{h}}$, $\underline{\underline{P}}^{\text{tr}} = \underline{\underline{H}}$ aufgebaut:

$$\underline{\underline{P}}^{(0)} = \underline{\underline{P}}^{\parallel} , \quad \underline{\underline{P}}^{(\pm 1)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}^{\perp} \mp i \underline{\underline{P}}^{\text{tr}}) \quad (8)$$

Die Projektionstensoren 2l-ter Stufe lassen sich auch aus den $\underline{\underline{P}}^{(m)}$ konstruieren:

$$p_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell, M)} = \sum_{m_1, \dots, m_\ell} \delta_{M, \sum_{j=1}^{\ell} m_j} \prod_{k=1}^{\ell} p_{\mu_k \mu'_k}^{(m_k)} . \quad (9)$$

III. Die Wirkung der $\mathcal{P}^{(m)}$ auf spezielle Tensoren 2. Stufe

Falls $\gamma_m^* = \gamma_{-m}$ ist, gilt

$$\sum_{m=-2}^{+2} \gamma_m \mathcal{P}^{(m)} = \gamma_0 \mathbb{1}^{(2)} + \sum_{m=1}^2 [(\operatorname{Re} \gamma_m - \gamma_0)(\mathcal{P}^{(m)} + \mathcal{P}^{(-m)}) + \operatorname{Im} \gamma_m i(\mathcal{P}^{(m)} - \mathcal{P}^{(-m)})].$$

Zunächst wird die Wirkung der Real- und Imaginärteile der $\mathcal{P}^{(m)}$ auf $\overline{\underline{e}} \underline{u}$ angegeben, wobei $\underline{e}$ und $\underline{u}$ zwei beliebige Einheitsvektoren sind, und $\overline{\underline{e}} \underline{u} = \frac{1}{2}(\underline{e} \underline{u} + \underline{u} \underline{e}) - \frac{1}{2} \delta \underline{e} \cdot \underline{u}$:

$$(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(-1)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{u}) \overline{\underline{e}} \underline{h} + (\underline{h} \cdot \underline{e}) \overline{\underline{u}} \underline{h} - 2(\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot \underline{u}) \overline{\underline{h}} \underline{h}$$

$$(\mathcal{P}^{(2)} + \mathcal{P}^{(-2)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = \overline{\underline{e}} \underline{u} + \frac{1}{2} \overline{\underline{h}} \underline{h} ((\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot \underline{u}) + \underline{e} \cdot \underline{u}) - (\underline{h} \cdot \underline{u}) \overline{\underline{e}} \underline{h} - (\underline{h} \cdot \underline{e}) \overline{\underline{u}} \underline{h}$$

$$i(\mathcal{P}^{(1)} - \mathcal{P}^{(-1)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{u}) \overline{\underline{h}} \underline{h} \times \underline{e} + (\underline{h} \cdot \underline{e}) \overline{\underline{h}} \underline{h} \times \underline{u}$$

$$i(\mathcal{P}^{(2)} - \mathcal{P}^{(-2)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = \frac{1}{2} \overline{\underline{e}} \underline{h} \times \underline{u} + \frac{1}{2} \overline{\underline{u}} \underline{h} \times \underline{e} - \frac{1}{2} (\underline{h} \cdot \underline{u}) \overline{\underline{h}} \underline{h} \times \underline{e} - \frac{1}{2} (\underline{h} \cdot \underline{e}) \overline{\underline{h}} \underline{h} \times \underline{u}$$

Sind speziell $\underline{e}$ und $\underline{u}$ orthogonal zueinander, so erhält man :

$$2(\underline{e} \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(-1)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{e})^2 + (\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 4(\underline{h} \cdot \underline{e})^2 (\underline{h} \cdot \underline{u})^2$$

$$2(\underline{e} \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(2)} + \mathcal{P}^{(-2)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (1 - (\underline{h} \cdot \underline{e})^2)(1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)^2$$

$$(\underline{e} \underline{u}) : i(\mathcal{P}^{(m)} - \mathcal{P}^{(-m)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = 0 \quad \text{für } m = 1, 2$$

$$2(\underline{u} \times \underline{e} \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(-1)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}))(1 - 4(\underline{h} \cdot \underline{u})^2)$$

$$2(\underline{u} \times \underline{e} \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(2)} + \mathcal{P}^{(-2)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{e})(\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}))((\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 1)$$

$$2(\underline{u} \times \underline{e} \underline{u}) : i(\mathcal{P}^{(1)} - \mathcal{P}^{(-1)}) : \overline{\underline{e}} \underline{u} = (\underline{h} \cdot \underline{u})(2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2 - 1)$$

$$2(\underline{u} \times \underline{e} \cdot \underline{u}) : i(\mathcal{P}^{(2)} - \mathcal{P}^{(-2)}) : \underline{\underline{e}} \underline{\underline{u}} = (\underline{h} \cdot \underline{u}) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)$$

Wenn dagegen $\underline{e} = \underline{u}$ ist, gilt nach obigen Formeln für ein beliebiges $\underline{e}'$:

$$(\underline{e}' \cdot \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(2)} + \mathcal{P}^{(-2)}) : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} = (\underline{h} \cdot \underline{e}') (\underline{h} \cdot \underline{u}) (1 - 2(\underline{h} \cdot \underline{u})^2)$$

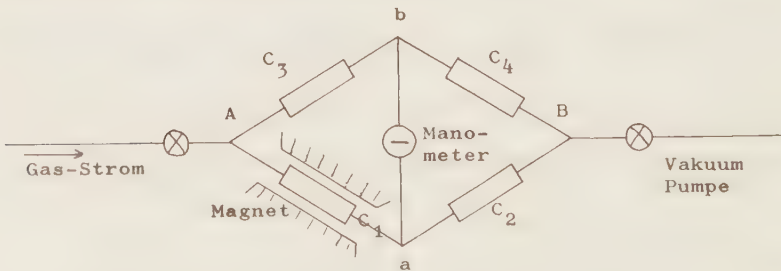
$$(\underline{e}' \cdot \underline{u}) : (\mathcal{P}^{(2)} - \mathcal{P}^{(-2)}) : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} = -\frac{1}{2} (\underline{h} \cdot \underline{e}') (\underline{h} \cdot \underline{u}) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)$$

$$(\underline{e}' \cdot \underline{u}) : i(\mathcal{P}^{(4)} - \mathcal{P}^{(-4)}) : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} = (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}')) (\underline{h} \cdot \underline{u})^2$$

$$(\underline{e}' \cdot \underline{u}) : i(\mathcal{P}^{(2)} - \mathcal{P}^{(-2)}) : \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} = \frac{1}{2} (\underline{h} \cdot (\underline{u} \times \underline{e}')) (1 - (\underline{h} \cdot \underline{u})^2)$$

IV. Bemerkungen zur Brückenordnung

Zur Messung relativ kleiner Viskositätsunterschiede dient eine aus vier Kapillaren $C_1 \dots C_4$ bestehende Meßbrücke; auf diese Weise wurden die magnetfeldabhängigen Viskositätskoeffizienten $\eta_1 - \eta$, $\eta_2 - \eta$, $\eta_3 - \eta$ von Beenakker e.a. ^{44a)}, Korving 8) ^{44d)}, Korving e.a. ^{44c)} und Hulsman e.a. 10) ^{42c)} gemessen. Das Schema der Anordnung ist in der folgenden Figur dargestellt:



Ohne Magnetfeld ist die Brücke abgeglichen, sodaß

$$p_a^o = p_b^o \quad (1)$$

gilt (der obere Index "o" soll $\underline{H} = 0$ charakterisieren), mit dem Manometer wird der beim Einschalten des Magnetfelds entstehende Differenzdruck $p_a - p_b$ gemessen. Der Massenstrom in der Kapillare C_i werde mit J_i , der Strömungswiderstand mit W_i ($i = 1, 4$) bezeichnet:

$$J_1 = \frac{p_A - p_a}{W_1}, J_2 = \frac{p_a - p_B}{W_2}, J_3 = \frac{p_A - p_B}{W_3}, J_4 = \frac{p_b - p_B}{W_4} \quad (2)$$

Zwischen den Meßpunkten "a" und "b" fließen keine Massenströme, daher ist

$$J_1 = J_2, J_3 = J_4 \quad (3)$$

Wenn sich nur die Kapillare C_1 im Magnetfeld befindet, leitet man aus (3) mit (2) und (1) folgenden Zusammenhang zwischen der Meßgröße $p_a - p_b$ und dem vom Magnetfeld hervorgerufenen Druckunterschied $\delta p_1 = p_A - p_a - (p_A^o - p_a^o)$ in C_1 her:

$$\frac{-(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \frac{p_a - p_b}{p_A - p_B} = 1 - \frac{W_1^o}{W_1} = (1 + \delta) \frac{\delta p_1}{p_A^o - p_a^o} \quad (4)$$

Wenn sich, wie bei der Methode der "gekreuzten Kapillaren" nach Korving ^{8) 44d}, auch noch C_3 im Magnetfeld befindet, ist in (4) δp_1 zu ersetzen durch $\delta p_1 - \delta p_3$. Der Faktor

$$\varepsilon = \frac{p_A^o - p_a^o}{p_a^o - p_B^o} = \frac{W_1^o}{W_2^o} = \frac{W_3^o}{W_4^o} \quad (5)$$

ist Eins für die "ideale Brücke", bei der ohne Feld C_1 und C_2 sowie C_3 und C_4 gleiche Strömungswiderstände haben.

Der Wert von δ hängt davon ab, welche Größe beim Einschalten des Magnetfelds konstant gehalten wird, die Druckdifferenz $p_A - p_B$ über die Brücke oder der Massenstrom durch C_1 ; es ist

$$\delta = \begin{matrix} \varepsilon \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} p_A - p_B = p_A^o - p_B^o \\ J_1 = J_1^o \end{matrix} \quad (6)$$

Aus der Beziehung

$$J_1 - J_1^0 = - \delta \cdot J_1^0 \frac{\delta p_1}{p_A^0 - p_a^0} \quad (7)$$

ergibt sich der in §11 und §14 verwendete Zusammenhang (11.19) zwischen der vom Magnetfeld hervorgerufenen Strömungsgeschwindigkeit und dem zusätzlichen Druckgradienten.

Der Strömungswiderstand ist proportional zur Viskosität, $w_1^0 \sim \eta$, $w_1 \sim \eta_{eff}$, also gilt mit $\Delta \eta \equiv \eta_{eff} - \eta$

$$1 - \frac{w_1^0}{w_1} \approx \frac{\Delta \eta}{\eta} \quad , \quad (8)$$

der Vergleich von (4) mit (8) liefert also

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = (1 + \delta) \frac{\delta p_1}{p_A^0 - p_a^0} \quad , \quad (9)$$

dh. die relative Änderung der Viskosität im Magnetfeld ist der relativen Druckänderung in C_1 proportional.

V. Berechnung der "isotropen" Differenztemperatur für das wärmeleitende Gas zwischen parallelen Platten

Hier soll für den "isotropen Fall" (dh. bei Vernachlässigung der Tensorpolarisation $\underline{a}$ und ihres Stroms $\underline{b}$) die Wärmeleitung in einem mehratomigen Gas zwischen parallelen Platten (Abstand $2d$, Temperaturen T_- und T_+) unter Berücksichtigung der Differenztemperatur behandelt werden. Da das Gas in Ruhe sein soll, $\underline{v}_{iso} = \underline{0}$, und da die Temperaturen und der Druck nur Funktionen von y ($y = \underline{x} \cdot \underline{u}$, $\underline{u}$ ist ein Einheitsvektor senkrecht zu den Platten, wie in Fig.10 p.98) sind, haben die Differentialgleichungen (5.8,9,11)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} T_{iso} = - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} T'_{iso} \left(\frac{\lambda''_{iso}}{\lambda_{iso}} + \frac{8}{25} \frac{\lambda_{iso}^{tr}}{\lambda_{iso}} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) ,$$

$$T'_{iso} - L_{T'}^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} T'_{iso} = 0 \quad , \quad \underline{\nabla} p_{iso} = - \frac{p_0}{T_0} \left(c_i + \frac{4}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) \underline{\nabla} T'_{iso}$$

die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} T'_{iso}(y) &= T'_{iso}(d) \sinh \frac{y}{L_{T'}} / \sinh \frac{d}{L_{T'}} \\ T_{iso}(y) &= T_0 + (T_+ - T_-) \frac{y}{2d} \frac{1}{\beta} - \left(\frac{\lambda''_{iso}}{\lambda_{iso}} + \frac{8}{25} \frac{\lambda_{iso}^{tr}}{\lambda_{iso}} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) T'_{iso}(y) \quad (1) \\ p_{iso}(y) &= p_0 - \frac{p_0}{T_0} \left(c_2 + \frac{4}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) T'_{iso}(y) \end{aligned}$$

Nach (8.5) verschwindet der isotrope Oberflächenwärmestrom, $\underline{Q}_{iso} = \underline{0}$, sodaß nach (8.9) $\underline{q}_{iso} \cdot \underline{n} = \underline{q}_{solid} \cdot \underline{n}$ gilt, und damit lauten die Randbedingungen (8.1,2)

$$\begin{aligned} T_{iso} - T_{solid} + \frac{2}{5} c_2 \frac{T_0}{p_0} (k_n')_{iso} &= L_{11} \underline{q} \cdot \underline{n} + L_{12} \underline{q}' \cdot \underline{n} \\ T'_{iso} + \frac{2}{5} \frac{T_0}{p_0} (k_n')_{iso} &= L_{21} \underline{q} \cdot \underline{n} + L_{22} \underline{q}' \cdot \underline{n} \end{aligned}$$

Mit den aus (1) und (3.1, 10, 11) berechneten Ausdrücken für die Wärmeströme und den Drucktensor

$$\underline{p}_{iso} = \frac{3}{2} \underline{u} \underline{u} \frac{p_0}{T_0} \frac{4}{5} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} T'_{iso}, \quad \underline{q}_{iso} = -\lambda_{iso} \frac{T_+ - T_-}{2d} \frac{1}{\beta} \underline{u} \quad (2)$$

$$\underline{q}'_{iso} = -\lambda''_{iso} \frac{T_+ - T_-}{2d} \frac{1}{\beta} \underline{u} - \lambda_{iso} \Delta \left(1 + \frac{8}{25} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) \underline{\nabla} T'_{iso}$$

erhält man aus den Randbedingungen die beiden Konstanten β und $T'_{iso}(d)$ zu

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + \frac{\ell}{d} \frac{C_{11} + 2 C_{12} \frac{\lambda''_{iso}}{\lambda_{iso}} + C_{22} \left(\frac{\lambda''_{iso}}{\lambda_{iso}} \right)^2 + \frac{\ell}{L_{T'}} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \Delta \coth \frac{d}{L_{T'}}}{1 + \frac{\ell}{L_{T'}} C_{22} \Delta \coth \frac{d}{L_{T'}}} \\ T'_{iso}(d) &= -(T_+ - T_-) \frac{\ell}{2d} \frac{1}{\beta} \frac{C_{21} + C_{22} \frac{\lambda''_{iso}}{\lambda_{iso}}}{\left(1 + \frac{8}{25} \frac{\omega_{+0}^{(22)}}{\omega_{\eta}} \right) \left(1 + \frac{\ell}{L_{T'}} C_{22} \Delta \coth \frac{d}{L_{T'}} \right)} \end{aligned} \quad (3)$$

wobei C_{ik} , Δ durch

$$L_{ik} = \frac{\ell}{\lambda_{iso}} C_{ik}, \quad \Delta \equiv \left(\left(\lambda^t \lambda^i - (\lambda^{it})^2 \right) / \lambda^2 \right)_{iso}$$

definiert sind.

Für kleine Knudsenzahlen ($1/d \ll 1$) kann $\coth \frac{d}{L_T} = 1$ ge-

setzt werden, $\beta - 1$ ist dann proportional zu $1/d$: $\beta = 1 + \frac{1}{d} \tilde{C}$. Der Koeffizient $\tilde{C}$ enthält neben dem Temperatursprungkoeffizienten $C_{11} = C_t$ auch noch C_{12} und C_{22} ; falls $C_{12} = 0$ ist, gilt $\tilde{C} > C_t$ für $C_{22} > 0$, für $C_{22} = 0$ ist $\tilde{C} = C_t$ und β geht in β_0 aus §16 (p.99) über.

Der Randwert der Differenztemperatur $T'_{iso}(d)$ ist proportional zu $1/d$; in einer Entfernung $\sim L_T$ vom Rand hat $T'_{iso}(y)$ praktisch den Wert Null angenommen.

Für große Knudsenzahlen ($1/d \gg 1$) ist $\coth \frac{d}{L_T} \approx L_T/d$ und

$\beta \approx \frac{1}{d}(C_{11} - C_{12}^2/C_{22})$, folglich ergibt sich aus (2) für den Wärmestrom mit e' und l aus (4.6,7) der Grenzwert

$$(q_{t,iso})_{1/d \rightarrow \infty} \equiv q_t^\infty = -\underline{u} n_0 k (T_+ - T_-) \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi M}} \frac{25\pi}{128 e'} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)^{-1} \quad (4)$$

Wenn nun $C_{12} = 0$ gesetzt wird, kommt in q_t^∞ keine für die Differenztemperatur charakteristische Größe mehr vor, Voraussetzung für den Grenzübergang, der zu (4) führt, war jedoch die Annahme $C_{22} > 0$! Mit $C_{12} = 0$ und dem Ausdruck (9.7) für $C_{11} = C_t$ stimmt q_t^∞ aus (4) genau mit dem im Knudsen-Gebiet geltenden Ergebnis⁴⁰⁾ (für gleiche Akkommodationskoeffizienten α_e an beiden Wänden)

$$q_t^K = -\underline{u} n_0 k (T_+ - T_-) \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi M}} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{C_t}\right) \frac{\alpha_e}{2 - \alpha_e} \quad (5)$$

überein. Die relative translatorische Wärmekapazität c_t (siehe (1.13)) ist im mehratomigen Gas kleiner als 1, im einatomigen Gas ist $c_t = 1$.

Der Grenzwert q_t^∞ in (4) wurde aus einer hydrodynamischen Rechnung mit der Differenztemperatur abgeleitet; die für $C_{12}=0$ erhaltene Übereinstimmung mit dem exakten Ergebnis (5) für das Knudsen-Gebiet (sogar für das einatomige Gas, in dem es die Differenztemperatur gar nicht gibt) scheint mir deshalb Zufall zu sein!

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) L.Waldmann, Z.Naturforsch.12a,660 (1957); 13a,609 (1958);
in "Handbuch der Physik",ed. S.Flügge,Vol.12, Springer,
Berlin, 1958.
- 2) R.F.Snider, J.Chem.Phys.32,1051 (1960)
- 3) S.Hess and L.Waldmann, Z.Naturforsch.21a,1529 (1966);
23a,1893 (1968)
- 4) H.H.Raum and W.E.Köhler, Z.Naturforsch.25a,1178 (1970)
- 5) Übersichtsartikel: J.J.M.Beenakker in "Festkörperproble-
me VIII", ed. O.Madelung, Vieweg, Braunschweig, 1968;
J.J.M.Beenakker and F.R.Mc Court, Ann.Rev.Phys.Chem.21,
47 (1970).
- 6) a) S.Hess, Phys.Letters 30A,239 (1969)
b) S.Hess, Springer Tracts in Mod. Phys. 54,136 (1970)
c) S.Hess in Proceedings of the 7th Int. Symp. on Rarefied
Gas Dynamics, Pisa 1970, ed. D.Dini, Academic Press
(in Vorbereitung)
- 7) S.Hess, Phys.Letters 29A,108 (1969); Z.Naturforsch.24a,
1675,1852 (1969); 25a,350 (1970).
- 8) J.Korving, Physica 50,27 (1970)
- 9) H.Hulsman, E.J.vanWaasdijk, A.L.J.Burgmans, H.F.P.Knaap
and J.J.M.Beenakker, Physica 50,53 (1970)
- 10) H.Hulsman, F.G.vanKuik, K.W.Walstra, H.F.P.Knaap and J.J.M.
Beenakker, Physica 57,501 (1972)
- 11) L.J.F.Hermans, J.M.Koks, A.F.Hengeveld and H.F.P.Knaap,
Physica 50,410 (1970)
- 12) G.G.Scott, H.W.Sturner and R.M.Williamson, Phys.Rev.158,
117 (1967); Phys.Letters 25A,573 (1967)
- 13) a) A.C.Levi and J.J.M.Beenakker, Phys.Letters 25A,350 (1967)
b) A.C.Levi, F.R.Mc Court and J.J.M.Beenakker, Physica 42,
363 (1969)
- 14) L.Waldmann, Z.Naturforsch.22a,1678 (1967); und ein "Invited
Paper" at A.P.S. Meeting, Dallas, March 1970.
- 15) H.Hulsman, F.G.vanKuik, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker,
Physica 57,522 (1972)
- 16) Persönliche Mitteilung von L.J.F.Hermans, April 1972.

- 17) M.E.Larchez and T.W.Adair III, Phys.Rev.Letters 25,21 (1970); Phys.Rev.3A,2052 (1971)
- 18) S.Hess, Z.Naturforsch.27a,366 (1972)
- 19) H.H.Raum, Dissertation, Erlangen, 1968, unveröffentlicht
- 20) J.Halbritter, Dissertation, Erlangen, 1972, unveröffentlicht
- 21) L.Waldmann, Z.Naturforsch.22a,1269 (1967);
Anwendungen der allgemeinen Theorie auf die thermische Kraft: H.Vestner, M.Kübel and L.Waldmann in Proceedings of the 7th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Pisa 1970, ed. D.Dini, Academic Press (im Druck),
auf das Problem der Verdampfung: L.Waldmann and R.Rübsamen, Z.Naturforsch.27a,1025 (1972)
- 22) H.Vestner in Proceedings of the 8th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Stanford 1972, ed. K.Karamcheti, Academic Press (in Vorbereitung)
- 23) W.E.Köhler, Dissertation, Erlangen, 1971, teilweise veröffentlicht in Z.Naturforsch.26a,1926 (1971)
- 24) J.P.J.Heemskerck, L.J.F.Hermans, G.F.Bulsing and H.F.P.Knaap, Physica 57,381 (1972)
- 25) E.A.Mason and L.Monchick, J.Chem.Phys.36,1622 (1962)
- 26) H.Moraal and R.F.Snider, Chem.Phys.Letters 9,401 (1971)
- 27) S.Hess and L.Waldmann, Z.Naturforsch.26a,1057 (1971)
- 28) C.S.Wang Chang and G.E.Uhlenbeck, Reports CM-443 (1948), UMH-3-F and CM-681 (1951) UMH-3-F ; siehe auch
C.S.Wang Chang, G.E.Uhlenbeck and J.de Boer in "Studies in Statistical Mechanics", Vol.II, eds. J.de Boer and G.E.Uhlenbeck, North-Holland, Amsterdam, 1964 .
- 29) F.R.Mc Court and R.F.Snider, J.Chem.Phys.47,4117 (1967)
- 30) F.R.Mc Court and R.F.Snider, J.Chem.Phys.46,2387 (1967)
- 31) S.R.de Groot and P.Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", North-Holland, Amsterdam, 1962.
- 32) H.Moraal and F.R.Mc Court, Physica 60,73 (1972); ausgewertet werden Schallabsorptionsmessungen von C.G.Sluijter, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker, Physica 30,745 (1964)
- 33) G.J.Prangsa, Dissertation, Leiden, 1971
- 34) Die experimentellen Werte von λ und η stammen von
a) H.Cauwenberg and W.van Dael, Physica 54,347 (1971)

- b) A.Rietveld and A.van Itterbeek, Physica 23,838 (1957)
- c) Data Book, Thermophysical Properties Research Center, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1966, Vol.2.
- 35) Das Vorzeichen des g-Faktors wurde gemessen in 9) und
- a) J.Korving, H.Hulsman, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker, Phys.Letters 21,5 (1966)
- b) L.J.F.Hermans, P.H.Fortuin, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker, Phys.Letters 25A,81 (1967)
- c) L.J.F.Hermans, A.Schutte, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker, Physica 46,491 (1970)
- 36) Messungen zur depolarisierten Rayleigh-Streuung :
V.G.Cooper, A.D.May, E.H.Hara and H.F.P.Knaap, Phys.Letters 27A,52 (1968)
R.A.J.Keijser, M.Jansen, V.G.Cooper and H.F.P.Knaap, Physica 51,593 (1971)
B.K.Gupta and A.D.May, Can.J.Phys.50,1747 (1972)
- 37) F.Baas, Phys.Letters 36A,107 (1971)
- 38) Relaxationskonstanten für das Modell der rauen Kugeln wurden berechnet für die Viskosität von
H.Moraal, F.R.Mc Court and H.F.P.Knaap, Physica 45,455 (1969), und für die Wärmeleitfähigkeit von
F.R.Mc Court, H.F.P.Knaap and H.Moraal, Physica 43,485(1969)
- 39) Die g-Faktoren wurden entnommen aus
- a) W.E.Quinn, J.M.Baker, J.T.La Tourrette and N.F.Ramsey, Phys.Rev.112,1929 (1958)
- b) C.H.Anderson and N.F.Ramsey, Phys.Rev.149,14 (1966)
- c) I.Ozier, P.N.Yi, A.Khosla and N.F.Ramsey, J.Chem.Phys. 46,1530 (1967)
- d) S.I.Chan, M.R.Baker and N.F.Ramsey, Phys.Rev.136A,1224 (1964); aus dem für N_2^{15} gemessenen Wert wurde der von N_2^{14} berechnet unter der Annahme $g \sim 1/M$.
- 40) E.H.Kennard, "Kinetic Theory of Gases", Mc Graw-Hill, New York, 1938.
- 41) H.Hulsman and H.F.P.Knaap, Physica 50,565 (1970)
- 42) Messungen der Viskositätskoeffizienten im rechteckigen Kanal wurden gemacht in Ref. 9), 10), 35a) und in
- a) I.K.Kikoin, K.I.Balashov, S.D.Lasarev and R.E.Neushadt, Phys.Letters 24A,165 (1967)

- b) I.K.Kikoin, K.I.Balashov, S.D.Lasarev and R.E.Neushtadt, Phys.Letters 26A,650 (1968)
- c) H.Hulsman and A.L.J.Burgmans, Phys.Letters 29A,629 (1969)
- d) H.Hulsman, A.L.J.Burgmans, E.J.van Waasdijk and H.F.P. Knaap, Physica 50,558 (1970)
- 43) M.Abramowitz and I.A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 1965
- 44) Messungen der Viskositätskoeffizienten in der Kreiskapillaren wurden gemacht in Ref. 8) und in
 - a) J.J.M.Beenakker, G.Scoles, H.F.P.Knaap and R.M.Jonkman, Phys.Letters 2,5 (1962)
 - b) J.Korving, H.Hulsman, H.F.P.Knaap and J.J.M.Beenakker, Phys.Letters 17,33 (1965)
 - c) J.Korving, H.Hulsman, G.Scoles, H.F.P.Knaap and J.J.M. Beenakker, Physica 36,177 (1967)
 - d) J.Korving, Physica 46,619 (1970) .

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof.Dr. L.Waldmann, danke ich herzlich für die Überlassung dieser interessanten Arbeit, für fördernde Kritik und für das stete Interesse an ihrem Fortgang.

Für viele wertvolle Anregungen schulde ich Herrn Priv.Doiz. Dr. S.Hess großen Dank. Bei meinen Kollegen, Dr.W.E.Köhler und Dr.J.Halbritter, möchte ich mich für das in vielen Diskussionen gezeigte Interesse bedanken.

Durch die guten Beziehungen zwischen den Arbeitsgruppen von Prof.Dr. L.Waldmann in Erlangen und Prof.Dr.J.J.M.Beenakker in Leiden war ich stets über den neuesten Stand der Experimente informiert, zuerst durch Dr.H.Hulsman, dann durch Dr.L.J.F.Hermans, denen ich dafür herzlich danken möchte, besonders auch für die Überlassung noch unveröffentlichter Meßergebnisse durch Dr.Hermans.

Die numerischen Rechnungen und ein Teil der Zeichnungen wurden am Rechenzentrum der Universität ausgeführt, für die großzügig gewährte Rechenzeit möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.



L E B E N S L A U F

Fritz Herbert Vestner,

geboren am 2.2.1942 in Lauf a.d.Pegnitz als Sohn des
Formers Konrad Vestner (verstorben 1958) und seiner Ehefrau
Margarete, geb. Teufel.

Besuch der Volksschule in Lauf von 1948 - 1952, dann der
Oberrealschule in Hersbruck von 1952 - 1961, Reifezeugnis
vom 19.7.1961 .

Studium der Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg vom
Wintersemester 1961/1962 bis zum Wintersemester 1968/1969 .
Diplom-Vorprüfung in Physik am 9.11.1964
Diplom-Hauptprüfung in Physik am 19.2.1969 .

Stellungen am Institut für Theoretische Physik der Universität:
studentische Hilfskraft vom 1.1.1967 - 31.3.1967
wissenschaftliche Hilfskraft vom 1.5.1969 - 31.3.1972
Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen
Assistenten seit 1.4.1972 .

Unverheiratet.

Erlangen, den 1.12.1972

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990